11/25

系：Z がスムーズでなくても $q < 2c$ なら $R^q i^! \mathbb{Z}_\ell = 0$. $j : Z^{\mathrm{sm}} \subset Z$：スムーズ密開部分スキームとすると，$R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c) = j_* j^* R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c) = j_* \mathbb{Z}_\ell$.

$[Z] \in H^{2c}_Z(X, \mathbb{Z}_\ell(c)) = H^0(X, R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c)) \simeq H^0(Z^{\mathrm{sm}}, \mathbb{Z}_\ell)$.

命題 1．$Z \subset X \to S$ で $X \to S$ がスムーズかつ，$Z \to S$ の各ファイバーが余次元 c なら，$s \in S$ に対し，$[Z] \in H^{2c}_Z(X, \mathbb{Z}_\ell(c))$ は，ひきもどしにより $[Z_s] \in H^{2c}_{Z_s}(X_s, \mathbb{Z}_\ell(c))$ にうつる．

2．サイクル類とトレース射の両立性．$Z \to X$ をスムーズ閉部分多様体とし，$n = \dim X, m = \dim Z, c = n - m$ とおく．このとき，トレース射 $H^{2m}_c(Z, \mathbb{Z}_\ell(m)) \to \mathbb{Z}_\ell$ は、合成

$$H^{2m}_c(Z, \mathbb{Z}_\ell(m)) = H^{2m}_c(X, i_* R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c)) \to H^{2n}_c(X, \mathbb{Z}_\ell(n)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Z}_\ell$$

と等しい．

帰結 1 有理同値：$\Gamma \subset X \times \mathbb{A}^1$ $[\Gamma_0] - [\Gamma_1]$ $[\Gamma] \in H^{2c}(X \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}_\ell(c))$

サイクル写像：$CH^c(X) \to H^{2c}(X, \mathbb{Z}_\ell(c))$

帰結 2 スムーズ閉部分スキームのうめこみ $j : V \to X$ によるひきもどしと交点積は両立。

$j^*[Z] = [j^! Z] \in H^{2c}_{j^{-1}Z}(V, \mathbb{Z}_\ell(c))$

帰結 3 次数射とトレース射の両立性．X を F 上固有スムーズで次元 d とすると，図式

$$\begin{tikzcd} CH_0(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}"] \arrow[d, "\deg"'] & H^{2d}(X, \mathbb{Z}_\ell(d)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\subset"] & \mathbb{Z}_\ell \end{tikzcd}$$

は可換である．

$j^*[Z] = [j^! Z] \in H^{2c}_{j^{-1}Z}(V, \mathbb{Z}_\ell(c))$

法束への変形

$X = \mathrm{Spec} A$, V が I で定義されるとすると，$C = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n-1}$.

N を法束 $N_{V/X}$，$C = C_{V \cap Z/Z} \subset N_{V/X}$ を法錐とする。

$j^! Z = (V, Z) \in CH_{\dim V - c}(Z \cap V)$ は，$[C] \in Z_{\dim V}(N_{Z \cap V})$ の像 $CH_{\dim V}(N_{Z \cap V}) \leftarrow CH_{\dim V - c}(Z \cap V)$ として定義される．