11/18

Künneth 公式、Poincaré 双対性。

以下 F は標数 $p>0$ の代数閉体．U は F 上 d 次元のスムーズ有限型スキームとする．

トレース射:

$\mathrm{Tr}: H^{2d}(U, \mathbb{Z}_\ell(d)) \to \mathbb{Z}_\ell$.

Poincaré 双対性。

$\mathcal{F}$ smooth $\mathbb{Q}_\ell$-層とすると双線型形式

$$H_c^q(U, \mathcal{F}) \times H^{2d-q}(U, \mathcal{F}^*(d)) \xrightarrow{\cup} H_c^{2d}(U, \mathbb{Q}_\ell(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Q}_\ell$$

は非退化.

Künneth 公式、

X, Y を F 上の有限型スキーム、$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X, Y 上の構成可能 $\mathbb{Q}_\ell$ 層とすると，標準射

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \mathcal{F}) \otimes H^q(Y, \mathcal{G}) \to H^{p+q}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

は同型.

抽象 Lefschetz 跡公式。

X を F 上の d 次元固有スムーズスキームとする．$\gamma \in H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d))$ に対し，自己準同型 $\gamma^*: H^q(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)$ を，合成

$$H^q(X, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{pr_2^*} H^q(X \times X, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\gamma\cup} H^{2d+q}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \xrightarrow{pr_{1*}} H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

と定義する．このとき

$$\sum_{q=0}^{2d} (-1)^q \mathrm{Tr}(\gamma^*: H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}(\Delta_X^*(\gamma)).$$

証明：上で定義した射

$$H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to \bigoplus_q \mathrm{End}(H^q(X, \mathbb{Q}_\ell))$$

は，Poincaré 双対性の同型

$$H^q(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2d-q}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to \mathrm{End}(H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)) : a \otimes b \mapsto (c \mapsto \mathrm{Tr}(b \cup c)a)$$

と，Kunneth 公式の同型

$$\bigoplus_q H^q(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2d-q}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d))$$

の逆を合成して得られる．$a \in H^q(X, \mathbb{Q}_\ell), b \in H^{2d-q}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)), \gamma = pr_1^* a \cup pr_2^* b$ とすると，$c \in H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)$ に対し，$\gamma^*(c) = pr_{1*}(pr_1^* a \cup pr_2^* b \cup pr_2^*(c)) = \mathrm{Tr}(b \cup c)a$ したがって，図式

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2d-q}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) & \longrightarrow & \mathrm{End}(H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)) \\ \cup \downarrow & & \downarrow (-1)^q \mathrm{Tr} \\ H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & \mathbb{Q}_\ell \end{array}$$

が可換なことをいえばよい．a, b を上のとおりとすると，$\mathrm{Tr}(\gamma^* : H^q) = \mathrm{Tr}(b \cup a) = (-1)^q(b \cup a)$

サイクル類.

X：スムーズ

Z：被約閉部分スキーム。余次元 c

$i : Z \to X$ 閉埋め込み。

relative purity: Z もスムーズならば、$R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c) = \mathbb{Z}_\ell$, $q \neq 2c$ なら $R^q i^! \mathbb{Z}_\ell = 0$. 同型はサイクル類.

$c = 1$ のとき．射の定義は局所的．Z が X の主因子 (f) とすると，$H^1(X - Z, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to H^2_Z(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$ による f の類の像の逆元．同型は，$i_\infty : Z \to X = \mathbb{P}^1_Z$ に帰着.

一般のときは、カップ積。帰納法.

系：Z がスムーズでなくても $q < 2c$ なら $R^q i^! \mathbb{Z}_\ell = 0$. $j : Z^{\mathrm{sm}} \subset Z$：スムーズ密開部分スキームとすると，$R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c) = j_* j^* R^{2c} i^! \mathbb{Z}_\ell(c) = j_* \mathbb{Z}_\ell$.