10/07

F を代数閉体とし，$X \to Y$ を F 上の proper smooth 代数曲線の有限平坦射で，関数体の拡大は分離なものとする．

Riemann-Hurwitz 公式． 各点 $x \in X$ での分岐指数 e_x が F の標数でわりきれなければ，

$$2g_X - 2 = [X : Y](2g_Y - 2) + \sum_{x \in X}(e_x - 1).$$

例１．F の標数を $p > 0$ とし，$n \geq 1$ を p と素な自然数とする．$Y = \mathbf{P}^1$ とし, $X \to Y$ を $x^n = y^p - y$ で定める．$g_Y = 0$．$f : X \to Y$ は $\mathbf{P}^1(\mathbb{F}_p)$ の外で不分岐．各 $y \in \mathbf{P}^1(\mathbb{F}_p)$ では完全分岐で分岐指数は n．よって，

$$2g_X - 2 = n(-2) + (p+1)(n-1)$$

で，$g_X = \frac{1}{2}(p-1)(n-1)$.

暴分岐だと次のような修正が必要.

例２．$F, n, Y = \mathbf{P}^1$ を例１と同様とする．$X \to Y$ を $x^p - x = y^n$ で定める．$g_Y = 0$．$\pi : X \to Y$ は ∞ の外で不分岐．∞ では完全分岐で分岐指数は p.

$$2g_X - 2 = (p-1)(n-1) - 2 = p(-2) + (p-1) + (p-1)n$$

である．最後の $(p-1)n$ が ∞ での暴分岐の寄与.