2008 年度夏学期　数学 I（2 年他クラス聴講分）　期末試験問題　斎藤　毅

7 月 29 日（火）5 限 17:00-18:30 (90 分)

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・計時機能のみの時計と筆記用具以外もちこめません。

最後の答だけを書くのではなく, 途中の計算なども**できるだけくわしく**書いて下さい. この点が不十分な答案は，最後の答えがあっていたとしても，大きく**減点**されることがありますので，注意してください.

問題 **1.** 理 I で数学 IA を履修した人は **1A.** を，それ以外の人は **1B.** を解答してください.

1A. 数列 $(a_n)_{n=0,1,\dots}$ を，$a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ で定める．極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

を求めよ．数列 (a_n) が収束することも証明せよ.

1B. 自然数 $n \geq 1$ に対し，不等式

$$e < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{n+1}{n! \cdot n}$$

がなりたつことを示し，不等式 $e < 2.719$ を示せ.

問題 **2.** (1) 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$$

を求めよ.

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$ の絶対値を M とおく．すべての実数 x に対し，

$$|\sin^2 x - x^2| \leq M x^4$$

がなりたつことを示せ.

問題 **3.** 2 変数関数 $f(x, y)$ を，

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

で定める.

(1)　偏導関数 $f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ と $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$ を求めよ.

(2)　関数 $f(x, y)$ のグラフの，点 $(1, 2, 3)$ での接平面の方程式を求めよ.

(3)　関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

問題 **4.** $f(x, y)$ を 2 階連続微分可能な関数とし，2 変数 r, θ の関数 $g(r, \theta)$ を，$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定める．偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を使って，偏導関数

$$g_r(r, \theta), \quad g_\theta(r, \theta)$$

をあらわせ.

1A. $a_n > 0$である．αが極限なら，$\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ かつ$\alpha \geq 0$だから，$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$|a_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{|a_n - \alpha|}{(1+\alpha)(1+a_n)} \leq \alpha \cdot |a_n - \alpha|$$

だから，$|a_n - \alpha| \leq \alpha^n |1-\alpha| \to 0 \ (n \to \infty)$.

1B. $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{n+1}{n \cdot n!}$.

$n = 5$とおけば,

$$\begin{aligned} e &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{6}{5 \cdot 120} \\ &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{24} + \frac{1}{100} = 2.67666\cdots + 0.04166\cdots = 2.71833\cdots < 2.719. \end{aligned}$$

$n = 6$なら,

$$\begin{aligned} e &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{7}{6 \cdot 720} \\ &< 2 + \frac{2}{3} + \frac{6}{120} + \frac{1}{600} = 2.71666\cdots + 0.00166\cdots = 2.71833\cdots < 2.719. \end{aligned}$$

2. (1) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots$ だから，$\sin^2 x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \cdots$ で，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}$.
(2) $f(x) = \sin^2 x$ とおく．$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x, f''(x) = 2\cos 2x, f^{(3)}(x) = -4\sin 2x, f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$ である．任意の実数xに対し,

$$\sin^2 x = x^2 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!} x^4$$

をみたす実数tがある，$|f^{(4)}(t)| \leq 8$ だから，任意の実数xに対し，$|\sin^2 x - x^2| \leq \frac{8}{24} x^4$ である．

3. (1) $f_x = 3x^2 - 3y, f_{xy} = -3$.
(2) $f_x(1,2) = 3 - 6 = -3, f_y(1,2) = -3 + 12 = 9$ だから，方程式は$z - 3 = -3(x - 1) + 9(y-2)$．整理すれば$z = -3x + 9y - 12$.
(3) $f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0$かつ$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0$ならば，$(x,y) = (0,0)$か$(1,1)$. よって，極値をとりうる点はこの2つだけ.
$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$ だから，$(0,0)$では極値をとらない．$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{xy}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 27 > 0$ だから，$(1,1)$で極小値-1をとる．

4.

$$\begin{pmatrix} g_r \\ g_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot f_x + \sin\theta \cdot f_y \\ -r\sin\theta \cdot f_x + r\cos\theta \cdot f_y \end{pmatrix}.$$

2008 年度夏学期　数学 II（2 年他クラス聴講分）　期末試験問題　斎藤　毅

7 月 31 日（木）5 限 17:00-18:30 (90 分)

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・計時機能のみの時計と筆記用具以外もちこめません。

最後の答だけを書くのではなく, 途中の計算なども**できるだけくわしく**書いて下さい. この点が不十分な答案は，最後の答えがあっていたとしても，大きく**減点**されることがありますので，注意してください.

問題 **1.** 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，P を点 $(1,1,1)$，ℓ を直線 OP とする.

(1) 直線 ℓ のパラメータ表示を与えよ.

(2) 点 $A=(1,0,0)$ を含み，ℓ と直交する平面の方程式を求めよ.

(3) 直線 ℓ を軸とし，点 A を点 $B=(0,1,0)$ に移す回転をあらわす行列を求めよ.

問題 **2.** $A=\begin{pmatrix}1&6&7&12\\2&5&8&11\\3&4&9&10\end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 方程式 $Ax=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の解をすべて求めよ.

問題 **3.** $A=\begin{pmatrix}0&0&-4\\1&0&-3\\0&1&-2\end{pmatrix}$ とおき，$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ とする.

(1) ベクトル Ax, A^2x, A^3x, A^4x を求めよ.

(2) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(4) I を 3 行 3 列の単位行列とする．行列式 $\det(10\cdot I-A)$ を求めよ.

1. (1) $x = t, y = t, z = t$.

(2) $x + y + z = 1$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ は1次独立であり，$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{13}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ だから，階数は2である．

(2) $b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は，方程式 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解であり，$c = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，方程式 $Ax = 0$ の解である．c と d は1次独立で，A の階数は2だから，一般解は $x = b + sc + td$（s, t は任意の実数）である．

3. (1) $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^3 x = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, A^4 x = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-4) \\ -4 - 2 \cdot (-3) \\ -3 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\det A = -4$.

(3) $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\det(10 \cdot I - A) = 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 = 1234$.