**例題 1**　$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$ で定義された関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$$

で定める．

1. 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．
2. 2 階偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．
3. $z=f(x,y)$ のグラフの点 $(1,\ \sqrt{3},\ f(1,\sqrt{3}))$ での接平面を求めよ．
4. 勾配ベクトル $\operatorname{grad} f(1,\sqrt{3})$ を求めよ．
5. 円周 $f(x,y)=f(1,\sqrt{3})$ の点 $(1,\sqrt{3})$ での接線は勾配ベクトル $\operatorname{grad} f(1,\sqrt{3})$ と直交することを示せ．

**解答例**　1. $f_x(x,y)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. 同様に $f_y(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

2. $f_{xx}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.
$f_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{x}{x^2+y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.
$f_{yy}(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

3. $z=f_x(1,\sqrt{3})(x-1)+f_y(1,\sqrt{3})(y-\sqrt{3})+f(1,\sqrt{3})$
$=\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(y-\sqrt{3})+\log 2=\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sqrt{3}y}{4}+\log 2-1.$

4. $\operatorname{grad} f(1,\sqrt{3})=\begin{pmatrix} f_x(1,\sqrt{3})\\ f_x(1,\sqrt{3})\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

5. 円周 $f(x,y)=f(1,\sqrt{3})$ は $x^2+y^2=4$ で，その点 $(1,\sqrt{3})$ での接線は $x+\sqrt{3}y=4$. これは勾配ベクトル $\operatorname{grad} f(1,\sqrt{3})=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ と直交する．

**問題 1** $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ で定義された関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

で定める．

1. 偏導関数 $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ を求めよ．
2. 2 階偏導関数 $g_{xx}(x,y)$, $g_{xy}(x,y)$, $g_{yy}(x,y)$ を求めよ．
3. $z = g(x,y)$ のグラフの点 $(1,\ \sqrt{3},\ g(1,\sqrt{3}))$ での接平面を求めよ．
4. 勾配ベクトル $\mathrm{grad}\, g(1,\sqrt{3})$ を求めよ．
5. 半直線 $g(x,y) = g(1,\sqrt{3})$ は勾配ベクトル $\mathrm{grad}\, g(1,\sqrt{3})$ と直交することを示せ．

**解答例** 1. $g_x(x,y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\Bigr)$

$= -\dfrac{1}{y}(1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}.$

$g_y(x,y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\Bigl(-\dfrac{1}{2}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\Bigr) = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$

2. $g_{xx}(x,y) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

$g_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{-1}{x^2+y^2} + \dfrac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$

$g_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{x}{x^2+y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

3. $z = g_x(1,\sqrt{3})(x-1) + g_x(1,\sqrt{3})(y-\sqrt{3}) + g(1,\sqrt{3})$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-1) + \dfrac{1}{4}(y-\sqrt{3}) + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{\pi}{3}.$

4. $\operatorname{grad} g(1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} g_x(1,\sqrt{3}) \\ g_x(1,\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$

5. 半直線 $g(x,y) = g(1,\sqrt{3})$ は $y = \sqrt{3}x,\ x > 0$ だから，勾配ベクトル $\operatorname{grad} g(1,\sqrt{3}) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ と直交する．