例題 1　点 $P=(1,2,5)$ をとおり，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ と平行なベクトルを含む平面を H とする．

1. H のパラメータ表示を 1 つ与えよ．

2. 2 変数の 1 次関数 $z=f(x,y)$ で，そのグラフが H となるものを求めよ．

3. 1 変数関数 $z=g(x)$ と $z=h(y)$ を $g(x)=f(x,2)$, $h(y)=f(1,y)$ で定める．$g(x)$ と $h(y)$ を求めよ．

4. H と垂直なベクトルを 1 つ求めよ．

5. xy 平面上の，点 $Q=(1,2)$ を中心とする半径が 1 の円周を C とする．C 上での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．最大値をとる点 R も求めよ．

6. ベクトル $\overrightarrow{QR}$ と平行で，大きさが $f(R)-f(Q)$ であるベクトルを求めよ．

7. 点 Q をとおり直線 QR と直交する，xy 平面上の直線 l の方程式を求めよ．

8. H と平面 $z=5$ の共通部分と，直線 l の関係を述べよ．

解答例　1. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ だから，
$x=s+1$, $y=t+2$, $z=2s+4t+5$.

2. 1 の答えから s,t を消去すれば，$f(x,y)=2(x-1)+4(y-2)+5$.

3. $f(x,y)=2(x-1)+4(y-2)+5$ で $y=2$ とおけば $g(x)=2(x-1)+5$, $x=1$ とおけば $h(y)=4(y-2)+5$.

4. (x,y,z) が H の点ならば2. より $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$ だから，
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ と直交する．よって $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ は H と垂直．

5. $\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ とすると，2. の答えより，$f(x,y)=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{h}+5$. (x,y) を C 上の点とし，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{h}$ のなす角を θ とおくと，$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{h}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{h}|\cos\theta$ で，$|\boldsymbol{h}|=1$ だから，最大値は $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{5}+5$. 最大値をとる $\boldsymbol{h}$ は $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\boldsymbol{a}$. よって R は $(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}},2+\dfrac{2}{\sqrt{5}})$.

6. ベクトル $\overrightarrow{QR}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と平行で，$f(R)-f(Q)=|\boldsymbol{a}|$. よって求めるベクトルは $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

7. 直線 QR はベクトル $\boldsymbol{a}$ と平行だから，それと直交する直線 l の方程式は $2(x-1)+4(y-2)=0$.

8. 2. の答えで $z=f(x,y)=5$ とおけば，共通部分は $2(x-1)+4(y-2)=0$, $z=5$. これは直線 l を z 軸の正の方向に 5 平行移動したもの．

問題 1　$f(x,y)=px^2+qxy+ry^2$ を 2 次形式とし，$(p-r,q)\neq(0,0)$ とする．
$u=\sqrt{(p-r)^2+q^2}>0$ とし，$p-r=u\cos\alpha,\ q=u\sin\alpha$ とおく．

1. $f(s\cos t, s\sin t)=\dfrac{s^2}{2}\big(A\cos(2t-\alpha)+B\big)$ をみたす定数 $A,\ B$ を求め，p,q,r で表せ．

2. 円周 $x^2+y^2=1$ での $f(x,y)$ の最大値 M と最小値 L を求め，p,q,r で表せ．最大値をとる点と最小値をとる点の座標を α を使って表せ．

3. $L<0<M$ となるための条件を p,q,r で表せ．

4. $L<0<M$ とし，$B=A\cos\beta,\ 0<\beta<\pi$ とする．$f(x,y)>0$ をみたす点 (x,y) の偏角の範囲を求めよ．

5. 不等式 $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2>0$ が定める範囲を求め，図示せよ．
　円周 $x^2+y^2=1$ 上での $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2$ の最大値 M と最小値 L を求め，最大値をとる点と最小値をとる点も上と同じ図に図示せよ．

解答例　1. $f(s\cos t, s\sin t) = s^2(p\cos^2 t + q\cos t\sin t + r\sin^2 t)$

$= \dfrac{s^2}{2}\big((p+r) + (p-r)(\cos^2 t - \sin^2 t) + q\cdot 2\cos t\sin t\big)$

$= \dfrac{s^2}{2}\big((p+r) + u\cos\alpha\cos 2t + u\sin\alpha\sin 2t\big) = \dfrac{s^2}{2}\big((p+r) + u\cos(2t-\alpha)\big)$

だから，$A = u = \sqrt{(p-r)^2+q^2}$, $B = p+r$.

2. $s=1$ で $A>0$ だから，$M = \dfrac{1}{2}(A+B) = \dfrac{1}{2}(p+r+\sqrt{(p-r)^2+q^2})$.

$L = \dfrac{1}{2}(-A+B) = \dfrac{1}{2}(p+r-\sqrt{(p-r)^2+q^2})$.

最大値をとる点では $2t-\alpha=0$ だから，その座標は $(\cos\dfrac{\alpha}{2}, \sin\dfrac{\alpha}{2})$, $(-\cos\dfrac{\alpha}{2}, -\sin\dfrac{\alpha}{2})$.

最小値をとる点では $2t-\alpha=\pi$ だから，その座標は $(\sin\dfrac{\alpha}{2}, -\cos\dfrac{\alpha}{2})$, $(-\sin\dfrac{\alpha}{2}, \cos\dfrac{\alpha}{2})$.

3. $L<0<M$ となるための条件は $LM<0$. 1 と 2 より

$LM = \dfrac{1}{2}(-A+B)\cdot\dfrac{1}{2}(A+B) = \dfrac{1}{4}(B^2-A^2) = \dfrac{1}{4}((p+r)^2-((p-r)^2+q^2))$

$= pr - \dfrac{q^2}{4}$ だから，求める条件は $4pr<q^2$.

4. $s\neq 0$ とすると，$f(s\cos t, s\sin t) = \dfrac{As^2}{2}\big(\cos(2t-\alpha)+\cos\beta\big) > 0$ となるための条件は，$|2t-\alpha|<\beta$, $|2t-2\pi-\alpha|<\beta$ だから，$\dfrac{\alpha-\beta}{2} < t < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\pi < t < \dfrac{\alpha+\beta}{2}+\pi$.

5. $p=1$, $q=2\sqrt{3}$, $r=-1$ だから，$u = \sqrt{(1+1)^2+(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{1+3} = 4$. $2 = 4\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$, $2\sqrt{3} = 4\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}$ だから $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. $A=4$, $B=0$ だから，$\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

よって偏角の範囲は，$-\dfrac{\pi}{12} < t < \dfrac{5\pi}{12}$, $\dfrac{11\pi}{12} < t < \dfrac{17\pi}{12}$.

最大値は $M = \dfrac{4}{2} = 2$, 最小値は $L = -\dfrac{4}{2} = -2$.

最大値をとる点の座標は $(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$, $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

最小値をとる点の座標は $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

図示は省略.