例題　関数 $f(x)$ と $g(x)$ は $x=a$ で連続とする．積 $f(x)g(x)$ も $x=a$ で連続なことを示せ．

解答例　$M_1 = \max(|f(a)|, 1)$, $M_2 = \max(|g(a)|, 1)$ とおく．$q>0$ を実数とすると，$f(x)$ は $x=a$ で連続だから，実数 $r_1>0$ で，$|x-a|<r_1$ ならば $|f(x)-f(a)| < \min(\frac{q}{3M_2}, \sqrt{\frac{q}{3}})$ となるものがある．同様に実数 $r_2>0$ で，$|x-a|<r_2$ ならば $|g(x)-g(a)| < \min(\frac{q}{3M_1}, \sqrt{\frac{q}{3}})$ となるものがある．

　$r=\min(r_1, r_2)>0$ とおけば，$|x-a|<r$ ならば

$$
\begin{aligned}
&|f(x)g(x)-f(a)g(a)| \\
&\leqq |f(a)|\cdot|g(x)-g(a)| + |g(a)|\cdot|f(x)-f(a)| + |f(x)-f(a)|\cdot|g(x)-g(a)| \quad (1) \\
&< M_1\cdot\frac{q}{3M_1} + M_2\cdot\frac{q}{3M_2} + \sqrt{\frac{q}{3}}\cdot\sqrt{\frac{q}{3}} = \frac{q}{3}+\frac{q}{3}+\frac{q}{3} = q
\end{aligned}
$$

となる．

考え方　$|f(x)-f(a)|$ と $|g(x)-g(a)|$ が小さければ，$|f(x)g(x)-f(a)g(a)|$ も小さくなることを示したい．

　$f(x)g(x)-f(a)g(a)$ を $f(x)-f(a)$ と $g(x)-g(a)$ で表す．辺の長さが $f(x)$, $g(x)$ の長方形から $f(a)$, $g(a)$ の長方形を取り除いて残った部分を 3 分割すれば

$$
\begin{aligned}
&f(x)g(x)-f(a)g(a) \\
&= f(a)\cdot(g(x)-g(a)) + g(a)\cdot(f(x)-f(a)) + (f(x)-f(a))\cdot(g(x)-g(a))
\end{aligned}
$$

となる．これの絶対値をとれば不等式 (1) が得られる．

　目標：$q>0$ を実数として，「$|x-a|<r$ ならば $|f(x)g(x)-f(a)g(a)|<q$」をみたす実数 $r>0$ をみつける．

　不等式 (1) の右辺は 3 項あるので，それぞれが $<\frac{q}{3}$ ならばその和が $<q$ となる．

　第 1 項について，$|g(x)-g(a)| < \frac{q}{3|f(a)|}$ ならば $|f(a)|\cdot|g(x)-g(a)| < \frac{q}{3}$ となるが，$f(a)=0$ かもしれない．$M_1=\max(|f(a)|, 1) \geqq 1$ とおけば，$|g(x)-g(a)| < \frac{q}{3M_1} = q_1$ ならば $|f(a)|\cdot|g(x)-g(a)| < M_1\cdot\frac{q}{3M_1} = \frac{q}{3}$ となる．$q_1>0$ なので，$g(x)$ が $x=a$ で連続という仮定より，実数 $r_1>0$ で $|x-a|<r_1$ ならば $|g(x)-g(a)|<q_1$ をみたすものがある．この r_1 に対して，$|x-a|<r_1$ ならば $|f(a)|\cdot|g(x)-g(a)| < \frac{q}{3}$ となる．

　第 2 項についても同様に，実数 $r_2>0$ で $|x-a|<r_2$ ならば $|g(a)|\cdot|f(x)-f(a)| < \frac{q}{3}$ となるものがある．

第 3 項については，$|f(x) - f(a)| < \sqrt{\dfrac{q}{3}} = q_3$, $|g(x) - g(a)| < q_3$ ならば $|f(x) - f(a)||g(x) - g(a)| < \sqrt{\dfrac{q}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{q}{3}} = \dfrac{q}{3}$ となる．

$q_3 > 0$ なので，$f(x)$ が $x = a$ で連続という仮定より，実数 $r_3 > 0$ で $|x - a| < r_3$ ならば $|f(x) - f(a)| < q_3$ をみたすものがある．同様に実数 $r_4 > 0$ で $|x - a| < r_4$ ならば $|g(x) - g(a)| < q_3$ をみたすものがある．

$r > 0$ を $r_1, r_2, r_3, r_4 > 0$ のうちで最小のものとすれば，$|x - a| < r$ ならば 3 項ともすべて $< \dfrac{q}{3}$ となり，$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < q$ がみたされる．

問題 1　関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であり，$f(a) \neq 0$ とする．$\dfrac{1}{f(x)}$ も $x = a$ で連続なことを示せ．

解答例　$q>0$ を実数とすると，$f(x)$ は $x=a$ で連続だから，実数 $r>0$ で，$|x-a|<r$ ならば $|f(x)-f(a)|<\min(\frac{q|f(a)|^2}{2},\ \frac{|f(a)|}{2})$ となるものがある．
この $r>0$ について，$|x-a|<r$ ならば

$$|f(x)| \geqq |f(a)| - |f(x)-f(a)| > \frac{|f(a)|}{2} \tag{2}$$

だから，

$$|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)||f(a)|} < \frac{q|f(a)|^2}{2}\frac{2}{|f(a)|}\frac{1}{|f(a)|} = q \tag{3}$$

となる．

考え方　目標：$q>0$ を実数として，「$|x-a|<r$ ならば $|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}|<q$」をみたす実数 $r>0$ をみつける．

(3) の第 2 項の分母の $f(x)$ がもし $f(a)$ だったら，「$|x-a|<r$ ならば $|f(x)-f(a)|<q|f(a)|^2$」となる r をとればよい．

$f(x)$ は $f(a)$ と等しくはないが，近いはずなので，$|f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2}$ がなりたつようにできれば，$f(a)=f(x)+(f(a)-f(x))$ より，$|f(a)| \leqq |f(x)|+|f(a)-f(x)|$ であり，移項して (2) が得られる．