次の例題と問題の記号は共通です．

例題　写像 $f, g, p\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$f(s,t) = (s^2 - t^2,\ 2st),\ \ g(r,\theta) = (r^2,\ 2\theta),\ \ p(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

で定める．合成写像 $f \circ p\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を h で表す．平面 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 $A,\ B,\ C$ を

$$\begin{aligned} A\ &= \{(s,\ t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 - t^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s\}, \\ B\ &= \{(r,\ \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r \geqq 0,\ \ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\ \ r^2\cos 2\theta \leqq 1\}, \\ C\ &= \{(q,\ \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid q \geqq 0,\ \ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3},\ \ q\cos\varphi \leqq 1\} \end{aligned}$$

で定める．

1. $(r,\ \theta) \in \mathbf{R}^2$ に対し $h(r,\ \theta)$ を求めよ．
2. 像 $g(\mathbf{R}^2)$ と $p(\mathbf{R}^2)$ を求めよ．
3. 写像 f は単射でないことを示せ．
4. $C = g(B)$ を示せ．

解答

1.

$$h(r,\ \theta) = f(p(r,\ \theta)) = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \big((r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2,\ 2r\cos\theta \cdot r\sin\theta\big)$$

$$= (r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\ r^2 \cdot 2\cos\theta\sin\theta).$$

2. $g(\mathbf{R}^2) = \{(q,\ \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid q \geqq 0\}$ である．右辺を D とおく．$(r,\ \theta) \in \mathbf{R}^2$ ならば $r^2 \geqq 0$ だから $g(\mathbf{R}^2) \subset D$ である．逆に，$(q,\ \varphi) \in D$ とすると，$r = \sqrt{q},\ \theta = \dfrac{\varphi}{2}$ とおけば $(q,\ \varphi) = g(r,\ \theta)$ である．よって $g(\mathbf{R}^2) \supset D$ であり $g(\mathbf{R}^2) = D$ である．

【注】集合の等式 $A = B$ を示すには，このように $A \subset B$ と $A \supset B$ の両方を示せばよい．高校までは，集合の包含関係を表す記号として $A \subseteqq B,\ A \subset B$ を使ったが，大学ではそれぞれ $A \subset B,\ A \subsetneqq B$ で表すのがふつうである．

$(x,\ y) \in \mathbf{R}^2$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすれば $(x,\ y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = p(r,\ \theta)$ である．よって $p(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$ である．

3. $f(1, 0) = (1^2 - 0^2,\ 2 \cdot 1 \cdot 0) = (1,\ 0)$ と $f(-1, 0) = ((-1)^2 - 0^2,\ 2 \cdot (-1) \cdot 0) = (1,\ 0)$ は等しいから，f は単射でない．

4. $(r,\ \theta) \in B$ とすると，$r^2 \geqq 0,\ 0 \leqq 2\theta \leqq \dfrac{\pi}{3},\ r^2\cos 2\theta \leqq 1$ だから，$g(r,\ \theta) \in C$ である．よって $C \supset g(B)$ である．

逆に $(q,\ \varphi) \in C$ とし，$r = \sqrt{q},\ \theta = \dfrac{\varphi}{2}$ とおくと，$r \geqq 0,\ \ 0 \leqq \theta = \dfrac{\varphi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{6}$, $r^2\cos 2\theta = q\cos\varphi \leqq 1$ だから，$(r,\ \theta) \in B$ である．$(q,\ \varphi) = g(r,\ \theta)$ だから $C \subset g(B)$ であり，$C = g(B)$ である．

問題 1　写像 $f, g, p\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$f(s,t) = (s^2 - t^2,\, 2st),\ \ g(r,\theta) = (r^2,\, 2\theta),\ \ p(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$$

で定める．合成写像 $f \circ p\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を h で表す．平面 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 A, B, C を

$$\begin{aligned} A &= \{(s,\, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 - t^2 \leqq 1,\, 0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s\}, \\ B &= \{(r,\, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\ r^2\cos 2\theta \leqq 1\}, \\ C &= \{(q,\, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid q \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3},\ q\cos\varphi \leqq 1\} \end{aligned}$$

で定める．

1. 合成写像の等式 $f \circ p = p \circ g$ を示せ．
2. 像 $f(\mathbf{R}^2)$ を求めよ．
3. 写像 g と p は単射でないことを示せ．
4. A を図示せよ．
5. $A = p(B)$ を示せ．
6. $f(A) \subset \mathbf{R}^2$ を求め，図示せよ．

1. $(r,\,\theta) \in \mathbf{R}^2$ として

$$f(p(r,\,\theta)) = p(g(r,\,\theta)) \tag{1}$$

を示せばよい．左辺は例題 1 より

$$f(p(r,\,\theta)) = (r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\, r^2 \cdot 2\cos\theta\sin\theta)$$

である．右辺は

$$p(g(r,\,\theta)) = p(r^2,\,2\theta) = (r^2\cos 2\theta,\, r^2\sin 2\theta)$$

だから，倍角公式より (1) の右辺と左辺は等しい．

2. $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$ を示す．$(x,\,y) \in \mathbf{R}^2$ として $(x,\,y) = f(s,\,t)$ をみたす $(s,\,t) \in \mathbf{R}^2$ があることを示せばよい．$(x,\,y) = f(s,\,t)$ は $x = s^2 - t^2,\, y = 2st$ である．$x^2+y^2 = (s^2-t^2)^2+(2st)^2 = s^4-2s^2t^2+t^4+4s^2t^2 = s^4+2s^2t^2+t^4 = (s^2+t^2)^2$ だから，$s^2+t^2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

よって $(x,\,y) \neq (0,\,0)$ ならば $s = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} > 0,\, t = \dfrac{y}{2s}$ とし，$(x,\,y) = (0,\,0)$ のときは $(s,\,t) = (0,\,0)$ とすればよい．

3. $g(1,0) = (1^2,\,2\cdot 0) = (1,\,0)$ と $g(-1,0) = ((-1)^2,\,2\cdot 0) = (1,\,0)$ は等しいから，g は単射でない．

$p(0,0) = (0\cdot\cos 0,\, 0\cdot\sin 0) = (0,\,0)$ と $p(0,1) = (0\cdot\cos 1,\, 0\cdot\sin 1) = (0,\,0)$ は等しいから，p も単射でない．

4. 双曲線 $s^2 - t^2 = 1$ と直線 $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}s$ の交点を求める．$t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}s$ を $s^2 - t^2 = 1$ に代入すると $(1-\dfrac{1}{3})s^2 = 1$ だから，$s^2 = \dfrac{3}{2}$ で $(s,\,t) = (\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},\,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})$（複号同順）．

よって $O = (0,\,0),\ P = (1,\,0),\ Q = (\dfrac{\sqrt{6}}{2},\,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ とおくと，A は線分 OP, OQ と双曲線 $s^2-t^2=1$ の P と Q の間の部分で囲まれた領域.（図は省略）

5. $(r,\,\theta) \in B$ とすると，$(s,\,t) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ とおけば，$s \geqq 0,\, t \geqq 0,\, t \leqq \tan\dfrac{\pi}{6}\cdot s = \dfrac{\sqrt{3}}{3}s,\ s^2-t^2 = (r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta \leqq 1$ だから $(s,\ t) \in A$ である．よって $A \supset p(B)$ である．

逆に $(s,\,t) \in A$ とし，$(r,\,\theta)\ (0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6})$ を $(s,\,t)$ の極座標とすると，$r \geqq 0$, $r^2\cos 2\theta = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = s^2 - t^2 \leqq 1$ だから，$(r,\,\theta) \in B$ である．よって $A \subset p(B)$ であり，$A = p(B)$ である．

6. 1 より $f\circ p = p\circ g$ だから，5 と例題 4 より $f(A) = f(p(B)) = p(g(B)) = p(C)$ である．C は連立不等式 $q \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{3},\ q\cos\varphi \leqq 1$ で定義されているから，その像 $p(C)$ は $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ 0 \leqq x \leqq 1$ で定まり，$R = f(Q) = (1,\ \sqrt{3})$ とすると $f(A) = p(C)$ は 3 角形 OPR である.（図は省略）．