2019 年度 微分積分学 S2 末試験問題　理 2・3 21-24

7 月 26 日（金）4 限 15:05-16:35 (90 分)　 斎藤 毅

問題用紙　1 枚，解答用紙　A4 両面 2 枚（4 ページ），計算用紙 1 枚.

・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.

・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.

・途中の計算などもくわしく書いてください.

・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1　 $f(x,y) = x^3 - xy^2 - 6x^2 + 6y^2 = (x^2 - y^2)(x - 6)$ とおく.

極値判定法を使って次の問 1. と 2. に答えよ.

1. $f(x,y)$ が極値をとりうる点をすべて求めよ.

2. 1. で求めた各点で $f(x,y)$ が極値をとるかどうか判定せよ.

ラグランジュの未定係数法を使って次の問 3. に答えよ.

3. $4 < x < 6,\ 0 < y < x$ の範囲で，条件 $f(x,y) = -20$ のもとで関数 $x^2 + y^2$ が極値をとりうる点をすべて求めよ.

　注意：問題 1 は，必ず**指定された解き方**で解答してください.

　答え合わせをほかの方法でするのは自由です.

問題 2　 6 次式 $p(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - p(x)}{x^6} = 0$ をみたすとする.

1. $p(x)$ を求めよ.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - p(x)}{x^7}$ を求めよ.

3. $\dfrac{1}{10^{n+1}} < |\cos 1 - p(1)| \leqq \dfrac{1}{10^n}$ をみたす自然数 n を求め，不等式がなりたつことを示せ.

問題 3　 $f(x,y)$ を平面の $x > 0$ の部分で定義された微分可能な関数とする. $r > 0,\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $g(r,\theta)$ を $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定める.

1. 偏導関数 $f_x(x,y)$ との合成関数 $f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を，偏導関数 $g_r(r,\theta)$, $g_\theta(r,\theta)$ を使って表せ.

次の問 2. と 3. では $f(x,y) = \left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ とする.

2. $f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を求めよ.

3. $f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を求めよ.

裏面の注意もよく読んで解答してください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1. 1. $f(x,y)=x^3-xy^2-6x^2+6y^2$ より，$f_x(x,y)=3x^2-y^2-12x$, $f_y(x,y)=-2xy+12y$. よって $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ をみたす (x,y) は，$12y=2xy$ より $y=0, x=6$ をみたし，これを $3x^2=y^2+12x$ に代入すれば，$(x,y)=(0,0),(4,0),(6,\pm 6)$.

2. $f_{xx}(x,y)=6x-12$, $f_{xy}(x,y)=-2y$, $f_{yy}(x,y)=-2x+12$ である．
$(x,y)=(0,0)$ のとき，$f_{xx}(0,0)=-12$, $f_{xy}(0,0)=0$, $f_{yy}(0,0)=12$ である．$-12\cdot 12<0^2$ だから，$(x,y)=(0,0)$ では，極値をとらない．
$(x,y)=(4,0)$ のとき，$f_{xx}(4,0)=12$, $f_{xy}(4,0)=0$, $f_{yy}(4,0)=4$ である．$12\cdot 4>0^2, 12>0$ だから，$(x,y)=(4,0)$ で極小値をとる．
$(x,y)=(6,\pm 6)$ のとき，$f_{xx}(6,\pm 6)=24$, $f_{xy}(6,\pm 6)=\mp 12$, $f_{yy}(6,\pm 6)=0$ である．$24\cdot 0<(\mp 12)^2$ だから，$(x,y)=(6,\pm 6)$ で極値をとらない．

3. $h(x,y)=x^2+y^2$ とおく．$h_x(x,y)=2x, h_y(x,y)=2y$ である．ラグランジュの未定係数法より，極値をとるならば $\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}3x^2-y^2-12x\\-2xy+12y\end{pmatrix}$ をみたす実数 t が存在する．$y\neq 0$ だから $t(-2x+12)=2$ であり，$-2x^2+12x=3x^2-y^2-12x$ となる．移項すれば $y^2=5x^2-24x$ である．

これを $(x^2-y^2)(x-6)=-20$ に代入すれば，$(-4x^2+24x)(x-6)=-20$ となり，$x(x-6)^2=5$ である．これの $4<x<6$ をみたす解は，$x=5$ である．$y^2=5\cdot 5^2-24\cdot 5$ と $0<y<x$ をみたす y は $y=\sqrt{5}$ だから，$(x,y)=(5,\sqrt{5})$.

2. 1. $\cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ だから，$p(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}$.

2. $\cos^{(7)}(0)=0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-p(x)}{x^7}=0$.

3. テイラーの定理より，$\cos 1-p(1)=\dfrac{\cos^{(8)}(t)}{40320}$ をみたす $0<t<1<\dfrac{\pi}{3}$ がある．$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos t$ は単調減少だから，$1>\cos^{(8)}(t)=\cos t>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ であり，$\dfrac{1}{10^4}>\dfrac{1}{40320}>\cos 1-p(1)>\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{40320}>\dfrac{1}{10^5}$. よって，$n=4$.

［別解］$\cos 1=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ だから，$p(1)\leqq\cos 1\leqq p(1)+\dfrac{1}{40320}$. よって $0<\cos 1-p(1)\leqq\dfrac{1}{40320}<\dfrac{1}{10^4}$.

さらに $\cos 1-p(1)>\dfrac{1}{40320}-\dfrac{1}{3628800}\geqq\dfrac{11}{1000000}-\dfrac{1}{1000000}>\dfrac{1}{10^5}$. よって $n=4$.

3. 1. 連鎖律より，

$$f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = g_r\frac{\partial r}{\partial x} + g_\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = g_r\frac{x}{r} + g_\theta\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$= g_r\cos\theta - g_\theta\frac{\sin\theta}{r}.$$

2. $g(r,\theta) = \log r\cdot\theta$ だから， $g_r = \dfrac{\theta}{r}$, $g_\theta = \log r$. よって 1. より

$$f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\theta\cos\theta}{r} - \frac{\log r\cdot\sin\theta}{r} = \frac{\theta\cos\theta - \log r\cdot\sin\theta}{r}.$$

3. 2. と 1. より，

$$f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$= \left(\frac{\theta\cos\theta - \log r\cdot\sin\theta}{r}\right)_r\cos\theta - \left(\frac{\theta\cos\theta - \log r\cdot\sin\theta}{r}\right)_\theta\frac{\sin\theta}{r}$$
$$= -\frac{\theta\cos\theta - \log r\cdot\sin\theta + \sin\theta}{r^2}\cos\theta - \frac{\cos\theta - \theta\sin\theta - \log r\cdot\cos\theta}{r}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$= -\frac{\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}(\log r - 1)$$
$$= -\frac{\theta\cos 2\theta}{r^2} + \frac{(\log r - 1)\sin 2\theta}{r^2}.$$