2019 年度 微分積分学 期末試験問題　理 2・3 21-24

1 月 30 日（木）5 限 17:00-18:30 (90 分)　斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　A4 両面 2 枚（4 ページ），計算用紙 1 枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.

問題 1 1. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}$ を定積分として表し，その値を求めよ.

2. 自然数 n に対し，$T_n = \dfrac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \dfrac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!}$ とおく.

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2n}dx$ を，T_n を使って表せ.

問題 2 $k \geqq 0$ を自然数とし，${}_nC_k$ で組み合わせの数を表す.

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_k x^n$ の収束半径を求めよ.

2. $|x|<1$ の範囲で，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ の巾級数展開を求めよ.

3. $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{{}_nC_k}{2^n}$ の値を求めよ.

問題 3 st 平面の閉集合 E を

$$t \geqq 0, \quad \sqrt{3}t \leqq s \leqq \sqrt{1+t^2}$$

で定める．2 変数関数 $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$ が定める平面の写像による E の像 $\{(s^2-t^2, 2st) \mid (s,t)\in E\}$ を D で表す.

1. D の面積 $m(D)$ を求めよ.

2. 変数変換公式を $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$ に適用して，$m(D)$ を E 上の積分として表せ.

3. 不定積分 $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$ を求めよ.

4. 積分 $\displaystyle\int_E (s^2+t^2)dsdt$ を，s で先に積分する逐次積分で求めよ.

問題 4 $(a_n)_{n\geqq 0}$ を数列とし，数列 $(s_n)_{n\geqq 0}$ を $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ で定める.

任意の $n \geqq 0$ に対し $a_n \geqq a_{n+1} \geqq 0$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ であるとする.

数列 $(s_n)_{n\geqq 0}$ はコーシー列であることを示せ.

裏面の注意もよく読んで解答してください

1 1. $\log\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n})$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log(1+\frac{k}{n})=\int_1^2\log xdx=[x\log x-x]_1^2=2\log 2-1.$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2n}dx=\frac{1}{2}B\Big(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})^2}{n!}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{T_n}.$

2 1. ダランベールの公式より，$\displaystyle r=\lim_{n\to\infty}\frac{{}_nC_k}{{}_{n+1}C_k}=\frac{n-k+1}{n+1}=1.$

2. $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=(1+(-x))^{-k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k-1}{n}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n.$

別解　$\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ を k 回項別微分すれば，

$\displaystyle\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(k)}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}.$ 左辺は $\displaystyle k!\cdot\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ だから，

$\displaystyle\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}=\sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_kx^{n-k}.$

3. 2. で $x=\dfrac{1}{2}$ とおけば，$\displaystyle\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{{}_nC_k}{2^{n-k}}.$

両辺を 2^k でわれば $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{{}_nC_k}{2^n}=2.$

3 1. 写像 $x=s^2-t^2,\ y=2st$ は，曲線 $s=\sqrt{1+t^2}$ を $x=1$ にうつし，直線 $t=0$ と $\sqrt{3}t=s$ をそれぞれ $y=0$ と $y=\sqrt{3}x$ にうつすから，D は $0\leqq y\leqq\sqrt{3}x$ と $x\leqq 1$ で定まる直角 3 角形．よって $m(D)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2. ヤコビアンは $4(s^2+t^2)$ だから，$\displaystyle m(D)=\int_D dxdy=\int_E 4(s^2+t^2)dsdt.$

3. $t=x+\sqrt{1+x^2}$ とおけば $x=\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{t})$，$\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t})$，$\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{t^2})$ だから，

$$\begin{aligned}&\int x^2\sqrt{1+x^2}dx=\int(\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}))^2\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt\\&=\frac{1}{16}\int\frac{1}{t}(t-\frac{1}{t})^2(t+\frac{1}{t})^2dt=\frac{1}{16}\int(t^3+\frac{1}{t^5}-\frac{2}{t})dt\\&=\frac{1}{16}(\frac{1}{4}(t^4-\frac{1}{t^4})-2\log t)\\&=\frac{2}{16}(\sqrt{1+x^2}^3x+\sqrt{1+x^2}x^3)-\frac{1}{8}\log(x+\sqrt{1+x^2})\\&=\frac{1}{8}(x+2x^3)\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{8}\log(x+\sqrt{1+x^2}).\end{aligned}$$

別解　部分積分により

$$\int x\cdot x\sqrt{1+x^2}dx = x\cdot\frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}^3 - \int\frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}^3dx$$

$= x\cdot\frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}^3 - \frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^2}dx - \frac{1}{3}\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$ だから，移項して

$$4\int x^2\sqrt{1+x^2}dx = (x+x^3)\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx.$$

$\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2}))$ だから，

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

4. $\displaystyle\int_E (s^2+t^2)dsdt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt\int_{\sqrt{3}t}^{\sqrt{1+t^2}}(s^2+t^2)ds$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{\sqrt{1+t^2}^3 - 3\sqrt{3}t^3}{3} + t^2(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{3}t))dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{\sqrt{1+t^2}}{3} + \frac{4}{3}t^2\sqrt{1+t^2} - 2\sqrt{3}t^3)dt.$$

よって，3. より求める積分は

$$\frac{1}{6}[t\sqrt{1+t^2} + (2t^3+t)\sqrt{1+t^2}]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{2\sqrt{3}}{4}[t^4]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{6}(1+1+1)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

4 $n > m$ とすると，

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k a_k$$

$$= (-1)^{m+1}\left((a_{m+1}-a_{m+2}) + \cdots + \begin{cases}(a_{n-1}-a_n) & n-m\text{ が偶数のとき,}\\ (a_{n-2}-a_{n-1})+a_n & n-m\text{ が奇数のとき,}\end{cases}\right)$$

である．数列 $(a_n)_{n\geqq 0}$ は単調減少だからかっこ内の各項は $\geqq 0$ であり，その和は

$$\left((a_{m+1}-a_{m+3}) + \cdots + \begin{cases}a_{n-1} & n-m\text{ が偶数のとき,}\\ (a_{n-2}-a_n)+a_n & n-m\text{ が奇数のとき,}\end{cases}\right) = a_{m+1}$$

以下である．

よって $|s_n - s_m| \leqq a_{m+1} \to 0$ （$m\to\infty$ のとき）だから，$(s_n)_{n\geqq 0}$ はコーシー列である．