2018 年度 **微分積分学 S2 ターム末試験問題** **理 1 20-23**

7 月 25 日（水）4 限 15:05-16:35 (90 分)　斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　A4 両面 2 枚（4 ページ），計算用紙 1 枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.
・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 $f(x,y)$ を $-x<y<x$ で定義された 2 変数の微分可能な関数とし，偏導関数を $f_x(x,y), f_y(x,y)$ とする.

$-u<v<u$ で定義された合成関数 $f(u^2+v^2, 2uv)$ を $g(u,v)$ で表わし，偏導関数を $g_u(u,v), g_v(u,v)$ とする.

1. 偏導関数 $g_u(u,v), g_v(u,v)$ を，合成関数 $f_x(u^2+v^2,2uv), f_y(u^2+v^2,2uv)$ を使って表わせ.

2. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$ とする.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 偏導関数 $g_u(u,v), g_v(u,v)$ を求め，u,v の有理式（u,v の多項式（定数も含む）の分数式）として表わせ.

(3) $p(t), q(t)$ を微分可能な関数で $-p(t)<q(t)<p(t)$ をみたすものとする. パラメータ表示された曲線 $(u,v)=(p(t),q(t))$ の各点で接ベクトルが勾配ベクトル $\mathrm{grad}\ g(p(t),q(t))$ と直交するとき，導関数 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{q(t)}{p(t)}$ を求めよ.

問題 2 実数 x に対し，$y^3-3x^2y=2$ の $y>\sqrt{3}|x|$ をみたす解を $y=g(x)$ とおく.

1. 導関数 $g'(x)$ を，$g(x)$ を使って表わし，$g(x)$ の増減表を書け.

2. 等高線 $y^3-3x^2y=2$ の $(x,y)=\left(\dfrac{5}{3},3\right)$ での接線を求めよ.

3. 等高線 $y^3-3x^2y=2$ のうち $y \geqq \sqrt{3}|x|$ をみたす部分で，関数 $4x-3y$ が条件つき極値をとる点を，ラグランジュの未定係数法を必ず使って求めよ.

問題 3 $f(x)=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とし，$p(x)$ を $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p(x)}{x^4}=0$ をみたす 4 次式とする.

1. $p(x)$ を求めよ.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p(x)}{x^5}$ を求めよ.

3. $\dfrac{1}{10^{n+1}}<f\left(\dfrac{1}{10}\right)-p\left(\dfrac{1}{10}\right)\leqq\dfrac{1}{10^n}$ をみたす n を求め，不等式がなりたつことを示せ.

裏面の注意もよく読んで解答してください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，解き方が問題の趣旨にあってないものや，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1. 1. 連鎖律より，

$g_u(u,v) = f_x(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2u + f_y(u^2+v^2, 2uv)2v,$

$g_v(u,v) = f_x(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2v + f_y(u^2+v^2, 2uv)2u.$

2. (1) 連鎖律より，

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}}\frac{-y}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{y}{x},$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}}\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

(2) $x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = (u^2+v^2+2uv)(u^2+v^2-2uv) = (u+v)^2(u-v)^2 = (u^2-v^2)^2$ で $|u|>|v|$ だから，$\sqrt{x^2-y^2} = u^2-v^2$. よって 1 と (1) より，

$$g_u(u,v) = -\frac{1}{u^2-v^2}\frac{2uv}{u^2+v^2}\cdot 2u + \frac{1}{u^2-v^2}\cdot 2v$$

$$= \frac{1}{u^2-v^2}\frac{2}{u^2+v^2}(-2u^2v+u^2v+v^3) = \frac{1}{u^2-v^2}\frac{2v}{u^2+v^2}(-u^2+v^2) = -\frac{2v}{u^2+v^2},$$

$$g_v(u,v) = -\frac{1}{u^2-v^2}\frac{2uv}{u^2+v^2}\cdot 2v + \frac{1}{u^2-v^2}\cdot 2u$$

$$= \frac{1}{u^2-v^2}\frac{2}{u^2+v^2}(-2uv^2+u^3+uv^2) = \frac{1}{u^2-v^2}\frac{2u}{u^2+v^2}(u^2-v^2) = \frac{2u}{u^2+v^2}.$$

(3) 接ベクトル $\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix}$ が勾配ベクトル $\mathrm{grad}\, g(p(t),q(t)) = \dfrac{2}{p(t)^2+q(t)^2}\begin{pmatrix} -q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$ と直交するから $-q(t)p'(t)+p(t)q'(t) = 0$. よって $\dfrac{d}{dt}\dfrac{q(t)}{p(t)} = \dfrac{-q(t)p'(t)+p(t)q'(t)}{p(t)^2} = 0$.

2. 1. $g(x)^3 - 3x^2g(x) = 2$ だから，$3(g(x)^2-x^2)g'(x) = 6xg(x)$. よって，$g'(x) = \dfrac{2xg(x)}{g(x)^2-x^2}$.

$g(x)^2 > 3x^2 \geqq x^2$ だから分母は >0 $g(x) > \sqrt{3}|x|$ だから分子は x と同符号. $g(x) > \sqrt{3}|x|$ だから $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. よって，

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $x<0$ で単調減少，$g(0) = \sqrt[3]{2}$, $x>0$ で単調増加，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

2. $3^3 - 3\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\cdot 3 = 27-25 = 2$ だから，$g(\dfrac{5}{3}) = 3$ である．よって，$g'(\dfrac{5}{3}) = \dfrac{2\cdot\frac{5}{3}\cdot 3}{3^2-(\frac{5}{3})^2} = \dfrac{10}{9-\frac{25}{9}} = \dfrac{90}{56} = \dfrac{45}{28}$. よって接線の方程式は $y = \dfrac{45}{28}(x-\dfrac{5}{3})+3 = \dfrac{45}{28}x + \dfrac{9}{28}$.

3. ラグランジュの未定係数法より，極値をとる点ではベクトル $(-6xy, 3y^2-3x^2)$ と $(4,-3)$ が平行．よって，$2(y^2-x^2)-3xy = 0$. 因数分解すれば $(2y+x)(y-2x) = 0$ だから，$y = 2x, -\dfrac{x}{2}$. これを $y^3-3x^2y = 2$ に代入すれば，$(8-6)x^3 = 2$ または，$(-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{2})x^3 = 2$. よって，$x = 1$ または $x = \sqrt[3]{\dfrac{16}{11}}$.

$x = \sqrt[3]{\dfrac{16}{11}}$ のときは，$0 \leqq \sqrt{3}|x| \leqq y = -\dfrac{x}{2} < 0$ で不適．よって，極値をとる点は $(x, y) = (1, 2)$ のみ．

3. 1. $\cosh' x = \sinh x$, $\cosh'' x = \cos hx$ だから，$p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. $f^{(5)}(0) = 0$ だから，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^5} = 0$.

3. $f(x) - p(x) \geqq \dfrac{1}{720} x^6$ だから，$f\left(\dfrac{1}{10}\right) - p\left(\dfrac{1}{10}\right) \geqq \dfrac{1}{720} \dfrac{1}{10^6} > \dfrac{1}{10^9}$

テイラーの定理より，$f\left(\dfrac{1}{10}\right) - p\left(\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{f^{(6)}(t)}{720} \dfrac{1}{10^6}$ をみたす $0 < t < \dfrac{1}{10}$ があり，$f^{(6)}(t) = f(t) < e^t < \exp\left(\dfrac{1}{10}\right) < 1.2$ だから，$f\left(\dfrac{1}{10}\right) - p\left(\dfrac{1}{10}\right) < \dfrac{1.2}{720} \dfrac{1}{10^6} = \dfrac{1}{600} \dfrac{1}{10^6} < \dfrac{1}{10^8}$. よって，$n = 8$.