2018年度 **微分積分学 期末試験問題** 理1 20-23

1月24日（木）4限 15:05-16:35 (90分)　斎藤 毅

・問題用紙　1枚，解答用紙　A4両面2枚（4ページ)，計算用紙1枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.

問題 1 平面全体で定義された2変数関数を $f(x,y)=4xy+2x^2+y^4$ で定める.
1. $f(x,y)$ が極値をとりうる点をすべて求めよ.
2. 小問1で求めた各点で，$f(x,y)$ が極小値をとるか，極大値をとるか，それとも極値をとらないか判定せよ.

問題 2 1. 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ を求めよ.
2. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^2}$ が収束するか発散するか判定せよ.
3. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \log n\cdot x^n$ の収束半径を求めよ.
4. $\log(x+\sqrt{x^2+1})=\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ をみたす巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ を求めよ.

問題 3 1. 積分 $\displaystyle\int_{0\leqq x\leqq y,(x-1)^2+(y-1)^2\leqq 2} xydxdy$ を，y で先に積分する逐次積分により求めよ.
2. 積分 $\displaystyle\int_{x\geqq 0,y\geqq 0,(x-1)^2+(y-1)^2\leqq 2} xydxdy$ を，極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ による変数変換公式を使って求めよ.

問題 4 1. 数列 (s_n) がコーシー列であることを表わすものになるように，

$\boxed{(1)}\,q>0\ \boxed{(2)}\,m\ \big(n\geqq m$ ならば $\boxed{\quad (\mathrm{A})\quad}\ \big).$

の空欄にあてはまるものを，それぞれ下のものの中から求めよ.

(1),(2)：全称記号 $\forall$ か存在記号 $\exists$ のどちらか，

(A) ：$q, s_n, s_m, +, -$ と絶対値記号 $|\ |$ と不等号 $\leqq, <$ だけを使った不等式. (使わないものもあります)

2. 閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ が条件「$0\leqq x\leqq y\leqq 1$ ならば $|f(x)-f(y)|\leqq|x-y|$」をみたすとし，数列 (s_n) を $s_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})$ で定める.

小問1の答で空欄をうめてえられるものがなりたつことを示せ.

裏面の注意もよく読んで解答してください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，解き方が問題の趣旨にあってないものや，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1. 1. $f(x,y)=4xy+2x^2+y^4$ だから，$f_x(x,y)=4y+4x,\ f_y(x,y)=4x+4y^3$. $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ ならば $y=-x, x=x^3$ だから，極値をとりうる点は $(x,y)=(0,0),(1,-1),(-1,1)$.

2. $f_{xx}(x,y)=4,\ f_{xy}(x,y)=4,\ f_{yy}(x,y)=12y^2$. $4^2-4\cdot 0>0$ だから $(x,y)=(0,0)$ では極値をとらない．$4^2-4\cdot 12<0$ だから $(x,y)=(1,-1),(-1,1)$ では極小値をとる．

2. 1. $\left(\dfrac{\log x+1}{x}\right)'=\dfrac{1-(\log x+1)}{x^2}=-\dfrac{\log x}{x^2}$ だから，

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx=-\lim_{t\to\infty}[\frac{\log x+1}{x}]_1^t$ は収束し，その値は 1.

別解：x を e^x とおいて置換積分すれば

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx=\int_0^\infty \frac{x}{e^{2x}}e^x dx=\int_0^\infty e^{-x}xdx=\Gamma(2)=1.$$

2. $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ とおけば，$f'(x)=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$ だから，$x\geqq\sqrt{e}$ で $f(x)$ は単調減少．広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ は 1 より収束するから，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty f(n)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\log n}{n^2}$ も収束する．

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\log(1+\tfrac{1}{n})=1$ だから，ダランベールの公式より $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \log n\cdot x^n$ の収束半径は 1.

4. $\displaystyle(\log(x+\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sum_{n=0}^\infty\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n}$

だから，項別積分すれば $\displaystyle\log(x+\sqrt{x^2+1})=\sum_{n=0}^\infty(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

3. 1. $\displaystyle\int_{0\leqq x\leqq y,(x-1)^2+(y-1)^2\leqq 2}xydxdy=\int_0^2 dx\int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}xydy$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^2 x((1+\sqrt{2-(x-1)^2})^2-x^2)dx$. 積分のなかみは

$x(1+2-(x-1)^2-x^2+2\sqrt{2-(x-1)^2})=2(x+x^2-x^3+x\sqrt{2-(x-1)^2})$.

$\displaystyle\int_0^2 x+x^2-x^3dx=[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}]_0^2=2+\frac{8}{3}-4=\frac{2}{3}$.

$x=1+\sqrt{2}\sin t$ とおいて置換積分すれば，$\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-(x-1)^2}dx$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\cos t\sqrt{2}\cos tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 tdt$

$\displaystyle=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{2}+[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1$. よって求める積分は $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5}{3}$.

2. $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ に $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入すれば，
$r^2-2r(\cos\theta+\sin\theta) \leqq 0$ だから，$r \leqq 2(\cos\theta+\sin\theta)$. よって，

$$\int_{x\geqq 0, y\geqq 0, (x-1)^2+(y-1)^2\leqq 2} xydxdy = \int_{0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}, 0\leqq r\leqq 2(\cos\theta+\sin\theta)} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r^3\cos\theta\sin\theta dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta)^4\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\theta\sin\theta)^2\cos\theta\sin\theta d\theta = 2(B(1,1)+4B(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})+4B(2,2))$$

$$= 2(1+4\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\pi+4\cdot\frac{1}{6}) = 2+\pi+\frac{4}{3} = \pi+\frac{10}{3}.$$

4. 1. (1) $\forall$. (2) $\exists$. (A) $|s_n-s_m|<q$. ($\leqq$ でも OK．)

2. $n \geqq m$ とする．$[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ と $[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]$ に共通部分があれば，$|\frac{i}{n}-\frac{j}{m}| \leqq \max(\frac{1}{n},\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$ だから $|f(\frac{i}{n})-f(\frac{j}{m})| \leqq |\frac{i}{n}-\frac{j}{m}| \leqq \frac{1}{m}$. よって，$|s_n-s_m| \leqq \frac{1}{m}$. $q>0$ に対し，m を $m>\frac{1}{q}$ をみたす最小の自然数とすれば，$n \geqq m$ ならば $|s_n-s_m| \leqq \frac{1}{m} < q$.