2012年度夏学期 **数理科学I 期末試験問題**

7月24日(火) 10:55–12:25 (90分)　斎藤 毅

・問題用紙　1枚，解答用紙　2枚（4ページ)，計算用紙1枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.
・解き方の指定がある問題は，それ以外の方法でといた答案は**採点しません**.
ほかの方法で検算するのは構いません.

問題 1 ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ を，

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

で定める.

1. rot $\boldsymbol{u}(x,y) = -u_y(x,y) + v_x(x,y)$ と div $\boldsymbol{u}(x,y) = u_x(x,y) + v_y(x,y)$ を求めよ.
2. $\boldsymbol{u}(x,y) = \mathrm{grad}\ f$ をみたす連続微分可能な関数 $f(x,y)$ は存在しないことを示せ.
3. $P = (1,0)$, $Q = (0,1)$, $R = (1,1)$ とし，P を始点 Q を終点とする曲線 C_1 と C_2 を次のように定める.
C_1：原点を中心とする半径1の円のうち第1象限に含まれる部分.
C_2：折れ線 PRQ.
線積分 $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{u}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x}$ と $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{u}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x}$ を求めよ.
4. D を C_1 と C_2 にはさまれる部分 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x^2 + y^2 \ge 1$ とする．D とベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y)$ について，グリーンの公式を確かめよ.

問題 2 曲線 $x^2 + y^2 = 1, x > 0$ で定義された関数 $36x + 25y^3$ の極値問題について，**ラグランジュ未定係数法を必ず使って**次の問1. と2. に答えよ.

1. 極値をとりうる点をすべて求めよ.
2. 1. で求めた各点で，極大値をとるか極小値をとるかそれとも極値をとらないか判定せよ.

問題 3 平面の原点をのぞき定義された写像 $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ を

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

で定義する.

1. $F(1,0)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を求めよ.
2. $F(x,y)$ のヤコビアン $J(x,y)$ を求めよ.
3. 点 (x,y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くときの，$F(x,y)$ の軌跡を求めよ.
4. 点 (x,y) が直線 $x + y = 1$ 上を動くときの，$F(x,y)$ の軌跡を求めよ.
5. D を $\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}$, $s^2 + t^2 \ge 1$ で定める．**変数変換** $(s,t) = F(x,y)$ **を必ず使って**

$$\int_D \frac{t}{(s^2+t^2)^3} ds dt$$

を求めよ.

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください.

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

なるべく，答案用紙の第nページに，問題nを解答してください.

解き方の指定された問題は，その方法を理解しているかを試験するための問題なので，それ以外の方法でといた答案は**採点しません**．ほかの方法で検算するのは構いません.

1 1. rot $\boldsymbol{u}(x,y)=2y+2y=4y$ であり，div $\boldsymbol{u}(x,y)=2x+2x=4x$ である．

2. $\boldsymbol{u}(x,y)=\mathrm{grad}\, f$ とすると，rot $\boldsymbol{u}(x,y)=\mathrm{rot\ grad}\, f=0$ となり rot $\boldsymbol{u}(x,y)=4y$ と矛盾する．

3. C_1 のパラメータ表示として $(\cos t,\sin t); 0\le t\le \frac{\pi}{2}$ をとれば，

$$\int_{C_1}\boldsymbol{u}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t\cdot\cos' t+\sin 2t\cdot\sin' t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t-t)dt=[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

である．

$$\int_{C_2}\boldsymbol{u}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x}=\int_0^1 2ydy+\int_1^0(x^2-1)dx=[y^2]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^0=1-\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3}$$

である．

4. D は，$-C_1$ と C_2 で左まわりに囲まれている．$\displaystyle\int_D \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}(x,y)dxdy$ は

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 4ydy=\int_0^1[2y^2]_{\sqrt{1-x^2}}^1dx=\int_0^1 2(1-(1-x^2))dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

であり，$\displaystyle\int_{-C_1}\boldsymbol{u}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x}+\int_{C_2}\boldsymbol{u}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x}=-1+\frac{5}{3}$ に等しい．

2 1. $p(x,y)=x^2+y^2-1,\ F(x,y,t)=(36x+25y^3)-t(x^2+y^2-1)$ とおく．$p_x(x,y)=2x,\ p_y(x,y)=2y$ であり，

$$F_x(x,y,t)=36-2tx,\ F_y(x,y,t)=75y^2-2ty,\ F_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)$$

である．$F_x(x,y,t)=F_y(x,y,t)=F_t(x,y,t)=0$ とすると，$y=0$ または $2t=75y$ である．$y=0$ とすると，$x=1,t=18$ である．$2t=75y$ とすると，$36=75xy$ だから $xy=\dfrac{12}{25}$ である．これと $x^2+y^2=1$ より，$(x,y,t)=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},30\right),\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{45}{2}\right)$ である．よって，極値をとりうる点は $(1,0),\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right),\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ の 3 つである．

2.

$$F_{xx}(x,y,t)=-2t,\ F_{yy}(x,y,t)=150y-2t,F_{xy}(x,y,t)=0$$

であり，

$$\begin{aligned}&F_{xx}(x,y,t)p_y(x,y)^2-2F_{xy}(x,y,t)p_x(x,y)p_y(x,y)+F_{yy}(x,y,t)p_x(x,y)^2\\&=-2t(2y)^2+(150y-2t)(2x)^2=-8t(x^2+y^2)+600x^2y\end{aligned}$$

である．$(x,y,t)=(1,0,18),\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},30\right),\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{45}{2}\right)$ それぞれに対しこの値は

$$\begin{aligned}&-8\cdot 18<0,\ -8\cdot 30+600\cdot\frac{36}{125}=24\Big(-10+\frac{36}{5}\Big)<0,\\&-8\cdot\frac{45}{2}+600\cdot\frac{48}{125}=4\Big(-45+\frac{6}{5}\cdot 48\Big)>0\end{aligned}$$

だから，それぞれ極大，極大，極小である．

3 1. $F(1,0)=(f(1,0),g(1,0))=(1,0)$, $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),g(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))=(1,1)$ である．

2.

$$\begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}$$

だから，その行列式は $\dfrac{-(x^2-y^2)^2-(2xy)^2}{(x^2+y^2)^4} = -\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = -\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$ である．

3. $(s,t)=F(x,y)$ とすると，$s^2+t^2=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ である．求める軌跡も円 $s^2+t^2=1$ である．

4. $s+t=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=(x+y)(s^2+t^2)$ だから，$x+y=1$ なら $s^2+t^2=s+t$ である．移項して整理すれば $\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ であり，求める軌跡は $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円から原点 $(0,0)$ を除いたものである．

5. 3. と 4. より，D は $F(x,y)$ により $E: x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1$ と 1 対 1 に対応する．2. と変数変換公式より，求める積分は

$$\int_E \frac{y}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)^3\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy=\int_E ydxdy$$

である．逐次積分より，これは

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} ydy=\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\frac{1-x^2-(1-x)^2}{2}dx$$
$$=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

である．