2011 年度冬学期 数学 IB 期末試験問題

2 月 14 日 (火) 10:55–12:25 (90 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　3 枚（6 ページ)、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

・なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.

問題 1　微分方程式 $xy' = 1 + y^2$ について次の問いに答えよ.

1. 一般解を求めよ.
2. $y = f(x)$ を，初期条件 $f(1) = 1$ をみたす解とする．$f(\sqrt[12]{e^{\pi}})$ を求めよ.

問題 2　$a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \dfrac{1}{2^n(2n+1)}$, $a_0 = 1$ とおく.

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 r を求めよ.
2. 開区間 $(-\sqrt{r}, \sqrt{r})$ で，関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ で定める.

(**注意！** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **ではありません**)

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n$ を使って，導関数 $f'(x)$ を求めよ.

3. $f(1)$ の値を求めよ.

問題 3　ベータ関数を $B(s,t) = \displaystyle\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx \ (s > 0, t > 0)$ で定める.
自然数 $n \geq 1$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ をベータ関数を使って表わせ.

（ヒント：それぞれ $x = \sin^2\theta$, $x = \tan\theta$ とおいて置換積分）

問題 4　1. 2 変数関数 $z = x^2 + y^2$ のグラフの $z \leq 1$ の部分の面積を重積分で表わせ.

2. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}}dt$ を求め，t の関数として表わせ.
3. 重積分 $\displaystyle\int_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$ を極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に変換し，さらに r で先に積分する逐次積分として表わせ.
4. 重積分 $\displaystyle\int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$ の値を求めよ.

問題 5　自然数 $n \geq 1$ に対し，リーマン和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i-1}{n}}$ を S_n で表わす.

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x dx - S_n$ と $\dfrac{e-1}{n}$ の大小を判定し，それを証明せよ.
2. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e-1}\left(\int_0^1 e^x dx - S_n\right)$ を求めよ.

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください．

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください．

なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください．

略解　**1** 1. 移項すれば $\dfrac{y'}{1+y^2}=\dfrac{1}{x}$ だから，積分して $\arctan y=\log|x|+C$. したがって，$y=\tan(\log|x|+C)$.

2. $1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ だから，$f(x)=\tan(\log x+\dfrac{\pi}{4})$. $\log\sqrt[12]{e^\pi}=\dfrac{\pi}{12}$ を代入すれば求める値は $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

2 1. $\dfrac{1}{r}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+2}\dfrac{2n+1}{2(2n+3)}=\dfrac{1}{2}$ だから，$r=2$.

2. 項別微分より，$f'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n}}{2^n}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}$.

3. 2. より $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}=\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$. $f(1)=\sqrt{2}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

3 $x=\sin^2\theta$ とおけば，$\dfrac{dx}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$ だから，

$$B(s,t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-2}\theta\cos^{2t-2}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-1}\theta\cos^{2t-1}\theta d\theta$$

$x=\tan\theta$ とすると，$\dfrac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta, \dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ だから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\theta d\theta=B(\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}).$$

4 1. 偏導関数は $z_x=2x,\ z_y=2y$ だから，面積は

$$\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}dxdy=\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy.$$

2. $s=\sqrt{1+t^2}+t$ とおくと，$\dfrac{1}{s}=\sqrt{1+t^2}-t$ だから，$t=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{s}\right)$，$\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$. よって，

$$\int\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}dt=\int\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)ds=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}\right)ds=\frac{1}{2}\log s-\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}$$
$$=\frac{1}{2}\log(t+\sqrt{t^2+1})-\frac{(t-\sqrt{t^2+1})^2}{4}=\frac{1}{2}\log(t+\sqrt{t^2+1})-\frac{2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}}{4}$$

3. $(x-1)^2+y^2=(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta)^2=r^2+1-2r\cos\theta$ だから，$(x-1)^2+y^2\le 1$ は $0\le r\le 2\cos\theta$ である．よって，

$$\int_{(x-1)^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2+1}dxdy=\int_{\substack{r\le 2\cos\theta,\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}\sqrt{r^2+1}\cdot rdrd\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{r^2+1}\cdot rdr$$

4. 3. と同様に，$\displaystyle\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2+1}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1\sqrt{r^2+1}\cdot rdr$ である．
$s=\sqrt{r^2+1}$ とおけば，$\displaystyle r\frac{dr}{ds}=s$ だから，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{r^2+1}\cdot rdr=\int_1^{\sqrt{2}}s^2ds=\left[\frac{s^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}=$
$\displaystyle\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ だから，積分の値は $\displaystyle\frac{2\sqrt{2}-1}{3}2\pi$ である．

5 1. $$\int_0^1 e^x dx-S_n=\sum_{i=1}^n\left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}e^x dx-\frac{1}{n}e^{\frac{i-1}{n}}\right)\le\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\left(e^{\frac{i}{n}}-e^{\frac{i-1}{n}}\right)=\frac{e-1}{n}.$$

2. $$\int_0^1 e^x dx-S_n=\sum_{i=1}^n\left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}e^x dx-\frac{1}{n}e^{\frac{i-1}{n}}\right)=\sum_{i=1}^n\left(e^{\frac{i}{n}}-e^{\frac{i-1}{n}}-\frac{1}{n}e^{\frac{i-1}{n}}\right)$$
$\displaystyle=\sum_{i=1}^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)e^{\frac{i-1}{n}}=\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$ だから，$\displaystyle h=\frac{1}{n}$ とおけば
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e-1}\left(\int_0^1 e^x dx-S_n\right)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-h}{h^2}\frac{h}{e^h-1}=\frac{1}{2}.$$