2011 年度夏学期 **数学 IB 期末試験問題**

8 月 31 日 (水) 10:55–12:25 (90 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　2 枚（4 ページ)、計算用紙 1 枚
・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
・なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください．

問題 1　2 変数 x, y の関数 $f(x, y)$ を，$f(x, y) = x^3y + xy^3 - 4xy$ で定める．$f(x, y)$ の $x > 0$ での極大値，極小値，峠点をすべて求めよ．

注意：必ず，もとの変数 x, y での偏微分や高次偏微分による極値判定法を使って求めてください．ほかの方法でもできますが，極値判定法を理解し使えるかを見るための問題なので，それ以外の方法で解いたものは**採点しません**．ほかの方法を検算に使うのは構いません．

問題 2　開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で定義された関数 $t = \tan x$ の逆関数を，$x = \arctan t$ で表わす．$x > 0$ で定義された 2 変数 x, y の関数 $f(x, y)$ を，$f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ で定める．

1. $f(1, 1)$ を求めよ．
2. $z = f(x, y)$ のグラフの $(x, y, z) = (1, 1, f(1, 1))$ での接平面の方程式を求めよ．

問題 3　$x > 0$ で定義された 2 変数 x, y の関数 $f(x, y)$ を，$f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ で定める．

1. 1 次関数 $l(x, y)$ で，$f(x, y) = l(x, y) + o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})$ つまり

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y) - l(x, y)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

をみたすものを求めよ．

2. 半開区間 $[0, 1)$ で定義された連続関数 $g(r)$ で，次の条件 (1) と (2) を両方ともみたすものを 1 つ与え，$g(r)$ が条件 (1) をみたしていることを示せ．

(1) $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leq r < 1$ をみたすすべての x, y, r に対し，

$$\left| \frac{f(x, y) - l(x, y)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} \right| \leq g(r)$$

がなりたつ．

(2) $g(0) = 0$.

問題 4　$t(x) = \dfrac{x - \frac{1}{6}x^3}{1 - \frac{1}{2}x^2}$ とおく．

1. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - t(x)}{x^5}$ を求めよ．
2. $\left|\tan \dfrac{1}{10} - t\left(\dfrac{1}{10}\right)\right|$ と $5 \cdot 10^{-7}$ のどちらが大きいか，証明つきで判定せよ．

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください.

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.

略解　**1** $f(x,y)=x^3y+xy^3-4xy$ だから，

$f_x(x,y)=3x^2y+y^3-4y,\ f_y(x,y)=x^3+3xy^2-4x.$

$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ の解は $(3x^2+y^2=4$ または $y=0)$ かつ $(x^2+3y^2=4$ または $x=0)$ だから，$x>0$ での解は，

$(2,0),(1,\pm1)$ の 3 点であり，極値をとる点あるいは峠点はこの 3 点に限る．

$f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=6xy,\ f_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-4$ だから，

$(2,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix}0&8\\8&0\end{pmatrix}$ である．$0^2-8^2<0$ だから，$(2,0)$ は峠点.

$(1,\pm1)$ では，$\begin{pmatrix}\pm6&2\\2&\pm6\end{pmatrix}$ であり，$(\pm6)^2-2^2>0$ だから，$(1,1)$ で極小，$(1,-1)$ で極大.

2　1. $f(1,1)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

2. $\arctan' t=\dfrac{1}{1+t^2}$ だから，連鎖律より $f_x(x,y)=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\dfrac{-y}{x^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ である．よって，接平面の方程式は

$$z=f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{y-x}{2}.$$

3　1.

$$\begin{aligned}l(x,y)&=f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)=1-(x-1)+(y-1)\\&=y-x+1\end{aligned}$$

である.

2. 1. より，

$$\begin{aligned}f(x,y)-l(x,y)&=\frac{y}{x}-(y-x+1)=(1-\frac{y}{x})(x-1)=\frac{x-y}{x}(x-1)\\&=\frac{(x-1)-(y-1)}{1+(x-1)}(x-1)\end{aligned}$$

である．(x,y) と r が $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\le r<1$ をみたすなら

$$|(x-1)-(y-1)|\le|x-1|+|y-1|\le 2r,\quad |1+(x-1)|\ge 1-|x-1|\ge 1-r$$

だから，$g(r)=\dfrac{2r}{1-r}$ とおけば，

$$\left|\frac{f(x,y)-l(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\right|\le\frac{|(x-1)-(y-1)|}{|1+(x-1)|}\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\le\frac{2r}{1-r}=g(r)$$

がなりたつ.

4 1. $c(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2,\ s(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3$ とおくと，$\cos x=c(x)+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^5), \sin x=s(x)+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^6)$ だから，

$$\begin{aligned}\tan x-t(x)&=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{s(x)}{c(x)}=\frac{c(x)\sin x-s(x)\cos x}{\cos x\cdot c(x)}\\&=\frac{c(x)(\frac{1}{120}x^5+o(x^6))-s(x)(\frac{1}{24}x^4+o(x^5))}{\cos x\cdot c(x)}\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-t(x)}{x^5}&=\lim_{x\to 0}\left(c(x)\frac{\frac{1}{120}x^5+o(x^6)}{x^5}-\frac{s(x)}{x}\frac{\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}{x^4}\right)\frac{1}{\cos x\cdot c(x)}\\&=\frac{1}{120}-\frac{1}{24}=-\frac{4}{120}=-\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

2. $b=\frac{1}{10}$ とおく．テイラーの定理より，$\cos b=c(b)+\dfrac{\cos t}{24}b^4, \sin b=s(b)+\dfrac{\cos u}{120}b^5$ をみたす $0<t<b, 0<u<b$ がある．1. と同様に

$$\tan b-t(b)=\frac{c(b)\frac{\cos u}{120}b^5-s(b)\frac{\cos t}{24}b^4}{\cos b\cdot c(b)}=\frac{c(b)\cos u-5\frac{s(b)}{b}\cos t}{\cos b\cdot c(b)}\frac{10^{-5}}{120}$$

である．

$$\left|c(b)\cos u-5\frac{s(b)}{b}\cos t\right|\le\max\Bigl(c(b)\cos u, 5\frac{s(b)}{b}\cos t\Bigr)\le 5,$$

$$\cos u>\cos b>c(b)=\frac{199}{200}$$

だから，

$$|\tan b-t(b)|\le 5\cdot\frac{200^2}{199^2}\frac{10^{-5}}{120}\le 5\cdot\frac{1.01^2}{1.2}10^{-7}<5\cdot 10^{-7}.$$