2011年度　数学IB演習問題　その6

問題 1 次の極限を定積分で表わし，その値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$，(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$，(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

問題 2 台形公式を使って，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\log 2-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$，(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right)$.

問題 3 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ を単位円とし，$A=(1,0)$, $B=(0,1)$ とする．

1. $p\geq 0$ とし，$P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}},\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$ とする．C の $x>0$ の部分のパラメータ表示 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ を使って，弧 AP の長さを積分で表せ．$\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ も確かめよ．
2. $q\geq 0$ とし，$Q=(q,\sqrt{1-q^2})$ とする．C の $y\geq 0$ の部分のパラメータ表示 $(s,\sqrt{1-s^2})$, $-1<s<1$ を使って，弧 BQ の長さを積分で表せ．$\arcsin x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds$ も確かめよ．

問題 4 次の曲線の長さを求めよ．

(1) $(t-\sin t, 1-\cos t)$, $(0\leq t\leq 2\pi)$ （**サイクロイド** (cycloid)），
(2) $(x,\cosh x)$, $(-1\leq x\leq 1)$ （**カテナリー** (catenary)），
$\left(\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, \sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right.$ （**双曲線余弦関数と双曲線正弦関数**）$\left.\right)$
(3) $(\cos^3 t,\sin^3 t)$, $(0\leq t\leq 2\pi)$ （**アステロイド** (asteroid)），
(4) $((1+\cos t)\cos t,(1+\cos t)\sin t)$, $(0\leq t\leq 2\pi)$ （**カーディオイド** (cardioid)），
(5) $(t\cos t, t\sin t)$, $(0\leq t\leq a)$.（**アルキメデスの螺旋** (Archimedes' spiral)），
(6) $(e^t\cos t, e^t\sin t)$, $(0\leq t\leq a)$.（**対数螺旋** (logarithmic spiral)）．

追加問題 $f(x)=x^2$ を閉区間 $[0,1]$ で定義された関数と考える．$d(\Delta)\leq r$ をみたす $[0,1]$ の分割 Δ に対し，リーマン和は不等式 $\left|\dfrac{1}{3}-S(f,\Delta,(t_i))\right|\leq 2r$ をみたすことを示せ．

問題 5 積分 $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} x\cos xy\,dxdy$ を求めよ．

問題 6 $a>1$ を実数とする．$t>0$ で定義された関数 $F(t)$ を $F(t)=\displaystyle\int_1^a\frac{1}{x^t}dx$ で定める．$F(t)$ を求め，$t>0$ で連続であることを確かめよ．

問題 7 $f(x,t)$ で $[0,\frac{\pi}{2}]\times(\frac{1}{2},\infty)$ で定義された関数 $\sin^{2t-1}x=(\sin x)^{2t-1}$ を表わす．

1. $f(x,t)$ は連続であり，t に関して偏微分可能であることを示せ．
2. 偏導関数 $f_t(x,t)$ は連続であることを示せ．
3. $F(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x,t)dx$ は微分可能であることを示せ．
4. 導関数 $F'(t)$ は連続であることを示せ．

問題 8 1. $0 < a \leq 1$ とし，A を不等式 $x \geq 0, \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ で定義される扇形とする．A の面積を積分で表し，$\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\bigl(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\bigr)$ を示せ．

2. $a > 1$ とし，A を不等式 $y \geq 0, \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}y \leq x \leq \sqrt{y^2+1}$ で定義される部分とする．A の面積を積分で表し，$\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\bigl(x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\bigr)$ を示せ．

問題 9 次の積分を 2 通りに逐次積分して求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1} 1-(x+y)dxdy$, (2) $\displaystyle\int_{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1} x^{a-1}y^{b-1}dxdy$ ($a \geq 1, b \geq 1$ は定数),
(3) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1, x\geq 0} xdxdy$, (4) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1-y^2}dxdy$

問題 10 $f(x)$ と $g(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする．$\displaystyle\int_{a\leq x\leq y\leq b} f(x)g(y)dxdy$ を 2 とおりに逐次積分で計算することにより，部分積分の公式を示せ．

問題 11 $f(x,y)$ を A 上で定義された連続関数とする．A が次の不等式で定義されているとき，積分 $\displaystyle\int_A f(x,y)dxdy$ を 2 とおりに逐次積分で表わせ．

(1) $x^2+y^2 \leq 1,\ x+y \geq 1$,　(2) $x^2 \leq y \leq x$,
(1) $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x,\ x+y \leq 3$,　(2) $x^2 \leq y \leq x+2$,

問題 12 次の立体の体積を求めよ．

(1) z 軸を軸とする半径 1 の円柱の $0 \leq z \leq x$ の部分．
(2) z 軸を軸とする半径 1 の円柱と，y 軸を軸とする半径 1 の円柱の共通部分．
(3) x 軸を軸とする半径 1 の円柱の $-2 \leq x \leq 2$ の部分と，z 軸を軸とする半径 1 の円柱の $-2 \leq z \leq 2$ の部分の合併．

問題 13 次の立体の体積を積分で表わせ．

(1) 点 $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ をとおり z 軸と平行な直線を軸とする半径 $\frac{1}{2}$ の円柱の $0 \leq z \leq x$ の部分．
(2) (1) と同じ円柱と，原点を中心とする半径 1 の球の共通部分．

問題 14 次の曲面のパラメータ表示を使って，その面積を求めよ．

(1) $x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 \leq x,\ z \geq 0$　$((x,y,z) = (\cos s\cdot\cos t, \sin s\cdot\cos t, \sin t))$.
(2) $x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}+3 = 0$　$((x,y,z) = ((2+\cos t)\cos s, (2+\cos t)\sin s, \sin t))$.

問題 15 1. サイクロイド $(1-\cos t, 0, t-\sin t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面の面積を $z = p(t) = t - \sin t$ で置換積分して求めよ．

2. 1. の曲面と平面 $z = 0,\ z = 2\pi$ で囲まれる立体の体積を求めよ．

問題 16 極座標への変数変換により，次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1, x\geq 0} xdxdy$, (2) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq x} xdxdy$, (3) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq x} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

問題 17 原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円板を底面とし頂点が $(0,0,1)$ である円錐 C と $(1,0,0)$ をとおり z 軸と平行な直線を軸とする半径 1 の円柱との共通部分の体積を求めよ.

問題 18 極座標への変数変換を使って次の条件で定まる図形の面積を求めよ.
(1) $(x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2$, (2) $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \leq 1$.

問題 19 $\displaystyle\int_{2x^2+2xy+5y^2\leq 9} x^2+4xy+4y^2 dxdy$ を，$P=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換による変数変換公式を使って求めよ.

問題 20 次の広義積分を求めよ.
(1) $\displaystyle\int_{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ (x,y)\neq(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}dxdy$, (2) $\displaystyle\int_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy$.