2011 年度　数学 IB 演習問題　その 5

問題 1 いたるところ定義された 2 回連続微分可能な関数 $f(x)$ が微分方程式 $y'' = -y$ の解であるとする.

1. $f(x)^2 + f'(x)^2$ は定数関数であることを示せ.
2. $f(x)$ が初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ をみたすなら，$f(x) - (a\cos x + b\sin x)$ は初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ をみたす解であることを示せ.
3. $f(x)$ が初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ をみたすなら，$f(x) = a\cos x + b\sin x$ であることを示せ.
4. $f(x)$ が初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ をみたし，巾級数展開されることを仮定して，$f(x) = a\cos x + b\sin x$ であることを示せ.

問題 2 次の微分方程式の一般解を求めよ．また，初期値問題の解も求めよ.

(1) $y' = -2xy;\ y(0) = -1,$　(2) $y' = -\dfrac{\cos x \sin x}{y};\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,$

(3) $y' = 2(1+y^2)x;\ y(0) = 1,$　(4) $y'^2 = e^{2x}(1-y^2);\ y(0) = 1.$

問題 3 微分方程式 $y' = y^2$ の初期値問題を解き，いたるところ定義された解は $y = 0$ だけであることを示せ.

問題 4 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\tan x$,　(2) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$,　(3) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$,　(4) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$,　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

問題 5 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $x\log x$,　(2) $\arctan x$,　(3) $\arcsin x$,　(4) $\log(x^2+1)$,　(5) $e^x \cos x$.

問題 6 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$,　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$,　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$,　(4) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$,

(5) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^{1-2s} x}dx$　（$0 < s < \frac{1}{2}$ は定数），(6) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$,　(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$.

問題 7 s を実数とする．広義積分との比較により，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ が収束するための s の条件を求めよ.

問題 8 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$,　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta$,　(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx$.

問題 9 次の有理関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{x^2-1}$,　(2) $\dfrac{x}{x^2-1}$,　(3) $\dfrac{1}{x^3-1}$,　(4) $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$,　(5) $\dfrac{1}{x^6+x^4-x^2-1}$.

問題 10 $a < b$ とする．閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x), g(x)$ に対し，$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ とおき，$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$ とおく．

1. $(f,g) \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ を示せ．
2. $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ を示せ．
3. $\|f\|_2 = 0$ ならば，$[a,b]$ で $f(x) = 0$ であることを示せ．
4. $a = 0, b = 2\pi$ とする．$f(x), g(x)$ が $\cos mx, \sin nx$ （$m \geq 0, n > 0$ は自然数）であるとき，そのすべての組み合わせに対し (f,g) を求めよ．

問題 11 次の定積分をそれぞれ積分区間を 10 等分して台形公式とシンプソンの公式を適用したとき，小数点以下何桁まで正しい値が得られると期待されるか求めよ．

(1) $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$,　(2) $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

問題 12 $[1,\infty)$ で定義された連続関数 $p(x)$ を，すべての自然数 $n \geq 1$ に対し $p(n) = \log n$ であり $n \leq x \leq n+1$ で 1 次関数であるという条件で定義する．$n \geq 2$ で定義された数列 (a_n) を，$a_n = \int_{n-1}^{n} (\log x - p(x))dx$ で定める．

1. $\sum_{k=2}^{n} a_k = 1 + \log \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$ であり，$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = 1 - \log\sqrt{2\pi}$ であることを示せ．
2. $n \geq 2$ なら $0 < a_n \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-\frac{3}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)$ であることを示せ．
3. 自然数 $n \geq 1$ に対し，$\sqrt{2\pi} < \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} \leq \sqrt{2\pi}\cdot\exp\frac{1}{6(2n-1)}$ を示せ．
4. n が 10 進法で表わしたとき m 桁の数ならば，$n!$ を 10 進法で表わすとおよそ $n(m - \log_{10} e)$ 桁の数になることを示せ．
5. $100!$ が何桁の数か求めよ．($\log_{10} e = 0.43429\cdots, \log_{10} 2\pi = 0.79818\cdots$ である．)

問題 13 ベータ関数 $B(s,t) = \int_0^1 (1-x)^{s-1}x^{t-1}dx$ に対し，次のことを示せ．

1. $B(1,1) = 1$. $m, n \geq 0$ が自然数なら $\frac{1}{B(m+1,n+1)} = (m+n+1)\binom{m+n}{m}$.
2. $B(s,t) = B(t,s)$.
3. $B(s,t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2s-1}(\sin x)^{2t-1}dx$.
4. $s \leq s', t \leq t'$ なら $B(s,t) \geq B(s',t')$.
5. $B(s+1,t) + B(s,t+1) = B(s,t)$.
6. $sB(s,t+1) = tB(s+1,t)$.
7. $B(s,t) = \frac{s+t}{s}B(s+1,t)$.

問題 14 ガンマ関数 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ について次の性質を示せ．

1. $s > 0$ に対し，$s\cdot\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ である．
2. 自然数 $n \geq 0$ に対し，$\Gamma(n+1) = n!$ である．