2011 年度　数学 IB 演習問題　その３

問題 1 次の極限が収束するか判定し，収束するときは極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\log(x^2+y^2)$,　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x>0} x^y$.

問題 2 $(x,y)\neq(0,0)$ で定義された関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ で定義する．

1. $f(x,y)$ は $(x,y)\neq(0,0)$ で連続であることを示せ．
2. 2 変数関数の極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないことを示せ．
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\lim_{(x,y)\to(x,0)} f(x,y)\right)=\lim_{y\to0}\left(\lim_{(x,y)\to(0,y)} f(x,y)\right)=0$ を示せ．

問題 3 $a<x<b$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $f(x)$ は $a<x<b$ で連続微分可能である．

(2) $a<x<b,\ a<y<b$ で定義された連続関数 $g(x,y)$ で，$f(x)-f(y)=g(x,y)\cdot(x-y)$ をみたすものが存在する．

問題 4 $f(x,y)=x^2+y^2$ とする．

1. 微分係数 $f'(1,2)$ は $\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$ であることを示せ．
2. $z=f(x,y)$ のグラフの $(x,y,z)=(1,2,5)$ での接平面の方程式を求めよ．

問題 5 $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ とする．

1. 微分係数 $f'\left(\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{9}\right)$ は $\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{8}\end{pmatrix}$ であることを示せ．
2. $z=f(x,y)$ のグラフの $(x,y,z)=\left(\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{8}{9}\right)$ での接平面の方程式を求めよ．

問題 6 1. c,d,p,q,r,s を実数とし，$(a,b)=(pc+qd,rc+sd)$ とおく．$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で微分可能な関数ならば，$f(px+qy,rx+sy)$ は $(x,y)=(c,d)$ で微分可能であり $(x,y)=(c,d)$ での微分係数は $f'(a,b)\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ であることを示せ．

2. $g(t),\ h(t)$ を $t=c$ で微分可能な関数とする．$f(x,y)=xy$ に連鎖律を適用して，$g(t)h(t)$ の $t=c$ での微分係数が $g(c)h'(c)+g'(c)h(c)$ であることを導け．

問題 7 $f(x,y)$ をいたるところ微分可能な関数とする．a,b を実数とし，すべての点 (p,q) に対し $f'(p,q)=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ であるとする．このとき，$f(x,y)$ は 1 次関数であることを示せ．

問題 8 1. 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

(1) $\dfrac{x-y}{x+y}$,　(2) $\log(x^2+y^2)$.

2. 次の関数 $g(t),h(t)$ について，1. の関数 $f(x,y)$ との合成関数 $f(g(t),h(t))$ の導関数を連鎖律を使って求めよ．

(1) $\cos t,\sin t$,　(2) e^t,e^{-t}.

3. 次の関数 $g(s,t),h(s,t)$ について，1. の関数 $f(x,y)$ との合成関数 $f(g(s,t),h(s,t))$ の偏導関数を連鎖律を使って求めよ．

(1) $s^2-t^2,2st$,　(2) $s+t,s-t$.

問題 9 $f(x,y)$ を $(x,y)\neq(0,0)$ なら $f(x,y)=\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$ と $f(0,0)=0$ で定義する．

1. $f(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ でのベクトル $\boldsymbol{p}\neq 0$ 方向の微分係数を求めよ．
2. $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で微分可能でないことを示せ．

問題 10 1. $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ は $(x,y)\neq(0,0)$ で微分可能であることを示し，その偏導関数を求めよ．

2. $\theta(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ は $x>0$ で微分可能であることを示し，その偏導関数を求めよ．

問題 11 $f(x,y)$ を $(x,y)\neq(0,0)$ で定義された微分可能な関数とする．

1. 合成関数 $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ は $r>0$ で定義された微分可能な関数であることを示し，その偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$, $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)$ を，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を使って表わせ．

2. $0\le\theta\le 2\pi$ で定義された関数 $h(\theta)$ で，$r>0, 0\le\theta\le 2\pi$ をみたすすべての (r,θ) に対し $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(\theta)$ をみたすものが存在するための条件を，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を使って表わせ．

問題 12 $f(x,y)$ が 2 回連続微分可能な関数であるとき，関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ を記号 $\triangle f(x,y)$ で表す．

1. 次の関数について，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．

(1) $ax^2+bxy+cy^2$ (a,b,c は定数)，(2) $\log\sqrt{x^2+y^2}$ ($(x,y)\neq(0,0)$)，(3) $\arctan\dfrac{y}{x}$ ($x>0$).

2. $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=g(r,\theta)$ とおく．合成関数 $\triangle f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ を $g(r,\theta)$ の 2 階までの偏導関数を使って表せ．

問題 13 次の関数の $(x,y)=(1,1)$ のまわりでの漸近展開を 2 次の項まで求めよ．

(1) $\sqrt{x^2+y^2}$,　(2) $\arctan\dfrac{y}{x}$.

問題 14 A,B を定数とし，2 変数 x,y の関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=Ax^2+By^2+\exp(-x^2-y^2)$ で定める．

1. 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ．
2. 2 階の偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y)$ を求めよ．
3. a,b を不等式 $0<a<b$ を満たす定数とし，$A=e^{-a^2}, B=e^{-b^2}$ とする．関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

問題 15 数列 (a_n) で，すべての番号 $n\ge 1$ に対し $0\le a_n\le 1$ であり，任意の実数 $0\le a\le 1$ に対し a に収束する部分列が存在するものを 1 つ与えよ．

問題 16 外接円の半径が 1 の三角形の 3 辺の長さの和の最大値を求めよ．