2011 年度　数学 IB 演習問題　その 2

問題 1 1. 次の不等式を示せ.

(1) $e^x > 1 + x \quad (x > 0)$,　　(2) $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right) \quad (0 < x < \dfrac{\pi}{2})$,

(3) $x \cdot \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{-1} < -\log(1-x) < x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1)$.

2. 次の不等式を示せ.

(1) $3 < \pi < \dfrac{3}{2} + \sqrt{3}$,　(2) $\dfrac{2}{3} < \log 2 < 1$,　(3) $2 < e < 2\sqrt{2}$.

問題 2 1. 次の関数を微分せよ.

(1) $\arctan(\sqrt{2}x - 1) - \arctan(\sqrt{2}x + 1)$,　(2) $\arctan x^2$,　(3) $x \log x - x \quad (x > 0)$,

(4) $\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x > 1)$,　(5) $x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x > 1)$.

2. 差 $\arctan x^2 - \bigl(\arctan(\sqrt{2}x - 1) - \arctan(\sqrt{2}x + 1)\bigr)$ を求めよ.

問題 3 ド・ロピタルの法則を使って，次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$,　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x \log x$,　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos^2 x}{x - \sin x}$.

問題 4 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) $(1+x)^a$ (a は実数),　(2) $\dfrac{1}{x^2 - x - 6}$,　(3) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,　(4) $e^x \cdot x^m$ (m は自然数)

問題 5 次の関数の $x = 0$ のまわりでの 4 位までの漸近展開を求めよ.

(1) e^x,　(2) $\sin x$,　(3) $\cos x$,　(4) $\log(1 + x)$,　(5) $\dfrac{1}{1+x}$,　(6) $\sqrt{1+x}$,

(7) $\arctan x$,　(8) $\arcsin x$,　(9) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$,　(10) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$,　(11) $\tan x$.

問題 6 漸近展開を使って次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos^2 x}{x - \sin x}$,　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^2}$,　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$.

問題 7 次の関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで n 次までテイラー展開して，$x = b$ での値 $f(b)$ を小数点以下 8 桁まで求めよ.

(1) $f(x) = e^x,\ b = \dfrac{1}{10},\ f(b) = \sqrt[10]{e}$,　(2) $f(x) = \sqrt{1-x},\ b = \dfrac{1}{50},\ f(b) = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

問題 8 $s > 0$ を定数とする．$x > 0$ で定義された関数 $e^{-x}x^{s-1}$ のグラフの概形を，関数の増減，凹凸，極値，$x \to 0$ と $x \to \infty$ での極限がわかるように図示せよ．最大値があればそれも図示せよ.

（注意：s の値により場合分けが必要）

問題 9 $p > 1$ と $x_1, \ldots, x_n > 0$ を実数とする．不等式 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$ を示せ．等号がなりたつための条件も求めよ.

問題 10 $f(x)$ を $a < x < b$ で定義された凸関数とする．

1. $-f(x)$ は凹関数であることを示せ．
2. $f(x)$ が $a < x < b$ で単調増加とし，$c = \lim_{x \to a+0} f(x),\ d = \lim_{x \to b-0} f(x)$ とおく．$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ は $c < x < d$ で定義された凹関数であることを示せ．

問題 11 1. $f(x) = c$ の解 $x = u$ に収束する数列 (b_n) をニュートン法により定める．$b_n - u \leq \dfrac{f(b_n) - c}{f'(a)}$ を示せ．

2. 次の関数 $f(x)$ と実数 a, b, c にニュートン法を適用して，$f(x) = c$ の解 $x = u$ に収束する数列 (b_n) を定める．

(a) $f(x) = x^2,\ a = 2,\ b = \dfrac{9}{4},\ c = 5$　　(b) $f(x) = x^3, a = \dfrac{5}{4},\ b = \dfrac{4}{3},\ c = 2.$

(a),(b) それぞれについて，u を小数点以下 4 桁までもとめよ．

問題 12 $0 < a < b < 2\pi$ を実数とし，C で曲線 $(\cos t, \sin t),\ a \leq t \leq b$ を表す．A, B を C の始点と終点とする．

1. $a < s < b$ に対し，点 $P = (\cos s, \sin s)$ での C の接ベクトルを求めよ．
2. 点 $P = (\cos s, \sin s)$ での C の接ベクトルが $\overrightarrow{AB}$ と平行となる点 P を求めよ．

問題 13 $f(t) = \cos 2t,\ g(t) = \sin t$ を $0 \leq t \leq 2\pi$ で定義された関数と考える．

1. $C = \{(f(t), g(t)) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ を図示せよ．
2. $A = (f(0), g(0)),\ B = (f(\frac{\pi}{2}), g(\frac{\pi}{2}))$ とする．実数 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ で，点 $P = (f(t), g(t))$ での接ベクトルが $\overrightarrow{AB}$ と平行となるものを求め，そのときの P と接ベクトルも求めよ．
3. $\dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{g(\frac{\pi}{2}) - g(0)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ をみたす実数 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ を求めよ．

問題 14 いたるところ定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{1}{x} & x < 0 \text{ のとき} \\ 0 & x \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．

1. 自然数 $n \geq 0$ に対し，n 次式 $P_n(x)$ を，$P_0(x) = 1$ と漸化式 $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx + 1)P_n(x)$ で帰納的に定義する．$x < 0$ なら $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} \cdot \exp \dfrac{1}{x}$ であることを $n \geq 0$ に関する帰納法で示せ．
2. $f(x)$ は無限回微分可能であり，すべての自然数 $n \geq 0$ に対し，$f^{(n)}(0) = 0$ であることを示せ．