2011 年度　数学 IB 演習問題　その１

問題 1. (1) $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ を，各 n に対し $a_n = 0$ か $a_n = 1$ のどちらかをみたす数列とする．すべての自然数 $m \geq 1$ に対し

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n} \leq b \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^m} \tag{1.1}$$

をみたす実数 b はただ 1 つであることを示せ.（ヒント：はさみうちの原理をつかう）

(2) 以下，すべての自然数 $m \geq 1$ に対し (1.1) をみたす実数 b を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ で表す．この定義にしたがって，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$ を示せ.

(3) 数列 $(b_n)_{n=1,2,\dots}$ も各 n に対し $b_n = 0$ か $b_n = 1$ のどちらかをみたすものとし，$a_m = 0, b_m = 1$ をみたす自然数 m があるとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$ となるための条件を求めよ.

(4) 数列 $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ を，$n = 2^k$ をみたす自然数 $k \geq 0$ があれば $a_n = 1$，そうでなければ $a_n = 0$ で定める．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ は有理数ではないことを示せ.

(5) b を $0 \leq b \leq 1$ をみたす実数とする．数列 $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ で，各 n に対し $a_n = 0$ か $a_n = 1$ のどちらかをみたし，$b = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ もみたすものが存在することを示せ.

追加問題. $A = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \geq 1 \text{ は自然数} \right\}$ とおく.

1. 3 は A の上界であることを示せ.
2. e は A の上限であることを示せ.

問題 2. 次の実数の集合を考える.

$$A_1 = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}, \quad A_2 = \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ は自然数 }\},$$
$$A_3 = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, m, n \geq 1 \text{ は自然数で } n^2 < 2m^2 \right\}, \quad A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x < 0\},$$
$$A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x < -2\}, \quad A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x \leq -2\}$$

(1) それぞれについて上に有界かどうか判定し，有界なら上限を求めよ．有界でなければ，その理由を記述せよ.

(2) 上限 $\sup A_i$ が A_i の元かどうか判定せよ.

問題 3. $a < b$ を実数とし，$f(x), g(x)$ を $a \leq x \leq b$ で定義された関数とする．すべての $a \leq x \leq b$ に対し $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ であるとする.

(1) 上限 $\displaystyle\sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ と $\displaystyle\sup_{a \leq x \leq b} g(x)$ が存在するならば，$\displaystyle\sup_{a \leq x \leq b} f(x)g(x)$ も存在し $\displaystyle\sup_{a \leq x \leq b} f(x)g(x) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \sup_{a \leq x \leq b} g(x)$ であることを示せ.

(2) $\displaystyle\sup_{a \leq x \leq b} f(x)g(x) < \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \sup_{a \leq x \leq b} g(x)$ となる連続関数 $f(x), g(x)$ の例をあげよ.

問題 4. $f(x), g(x)$ を $x = a$ をのぞき $x = a$ のまわりで定義された関数とする．b, c を実数とし，$|f(x) - b| \leq |g(x) - c|$ が $x = a$ をのぞき $x = a$ のまわりでなりたつとする．$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = c$ ならば $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = b$ であることを示せ.

問題 5. 次の極限を求めよ．

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\ \exp\frac{\sin x}{x},\quad (2)\ \lim_{x\to 0}\ \cos\frac{1-\cos x}{x},\quad (3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\log x},\quad (4)\ \lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{1}{x}).$$

問題 6. 次の実数 a と a で微分可能な関数 $f(x)$ に対し，下の問いに答えよ

$$(a)\ a=1, f(x)=x^2,\quad (b)\ a=4, f(x)=\sqrt{x},\quad (c)\ a=0, f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

(1) $f(x)-l(x)=o(x-a)$ をみたす 1 次関数 $l(x)$ を求めよ．
(2) (1) で求めた $f(x)-l(x)$ が $x=a$ のまわりで 1 位の無限小であることを確かめよ．

問題 7. 次の関数の導関数を求めよ．かっこ内は関数の定義域である．

$$(1)\ \log\log x\ \ (x>0),\quad (2)\ \log\cos x\ \ (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}),\quad (3)\ x^x=e^{x\log x}\ \ (x>0)$$
$$(4)\ \sqrt{1-x^2}\ \ (-1<x<1),\quad (5)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (-1<x<1),\quad (6)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \ (x\in\mathbb{R})$$

問題 8. a を定数とし，$f(x)=x^3-3ax$ を $0\le x\le 1$ で定義された関数と考える．
(1) $f(x)$ の逆関数が定義されるための a についての条件を求めよ．
(2) $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の定義域を求めよ．
(3) $g(x)$ が単調減少であるための a についての条件を求めよ．
(4) $a=2$ とする．$g'(x)\le -\frac{3}{14}$ をみたす x の範囲を求めよ．

問題 9. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+13$ とする．
(1) 方程式 $f(x)=0$ の解の個数を求めよ．
(2) $x=1$ 以外の解について $n\le x\le n+1$ をみたす整数を求めよ．

問題 10. 関数 $f(x)$ を $x\ge 0$ なら $f(x)=0$, $x<0$ なら $f(x)=\exp\frac{1}{x}$ で定める．
(1) $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．
(2) $f(x)$ はいたるところ微分可能であることを示せ．
(3) $f(x)$ はいたるところ連続微分可能であることを示せ．

問題 11. (1) $0\le x\le 1$ ならば $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ であることを示せ．
(2) $\arctan t=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ を示せ．この式と $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を使って，$\arctan' t$ を求めよ．
(3) $\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を示せ．この式と $\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$ を使って，$\arcsin' x$ を求めよ．
(4) $\arccos x=2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ を示せ．

問題 12. 次の関数の導関数を求めよ．

$$(1)\ x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\ \ (-1<x<1),\quad (2)\ \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\ \ (x<-1, x>1).$$

問題 13. $f(x), g(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続関数とする．$(f(0)-g(0)) \cdot (f(1)-g(1)) < 0$ ならば $f(c) = g(c)$ をみたす実数 $0 < c < 1$ が存在することを示せ．

問題 14. (1) 平均値の定理を $f(x) = e^x$ に適用して，$x > 0$ に対し $e^x > 1 + x$ を示せ．
(2) 自然数 $n \geq 1$ に対し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ を示せ．
(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \log x = 0$ を示せ．