広義積分 続き
例

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_t^1 = \frac{1}{1-a} \quad (a<1\text{ のとき})$$
$$= \infty \quad (a>1\text{ のとき})$$
$$\lim_{t\to 0}[\log x]_t^1 = \infty \quad (a=1\text{ のとき})$$

関数列。微積分と極限の順序交換
テイラー展開（復習）

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

収束半径 ∞

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

収束半径 1
他の関数

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \mathrm{Arctan}\ x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

収束半径 1
$\log(1-x)$ のテイラー展開を $\frac{1}{1-x}$ のテイラー展開から導くには，項別に積分できればよい．

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n}x^m,\quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

とおくと，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ である．

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{x^{m+1}}{m+1},\quad F(x) = -\log(1-x)$$

とおいて，$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ となるか？これは，

$$\int_0^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^x f_n(x)dx\right)$$

がなりたつか？いいかえれば，極限と積分の順序が交換可能かということ．この場合にはなりたつが，いつもなりたつわけではないので注意が要る．

反例：$f_1(x)$ を $0 \le x \le 1$ で定義された連続関数で，$f_1(0) = f_1(1)$ かつ $\int_0^1 f_1(x)dx = 1$ をみたすものとする．関数列 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} nf_1(nx) & 0 \le x \le \frac{1}{n} \text{のとき} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．$F_n(x) = \int_0^x f_n(x)dx$ とおけば，

$$F_n(x) = \begin{cases} F_1(nx) & 0 \le x \le \frac{1}{n} \text{のとき} \\ 1 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

である．$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であり，$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1, (0 < x \le 1)$ である．

したがって，式 $\int_0^x (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^x f_n(x)dx\right)$ はいつもなりたつわけではない．この式がなりたつための十分条件を考える．

関数列 $f_n(x)$ が関数 $f(x)$ に収束するとは，どの x に対しても $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ がなりたつこと，つまり $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ということ．$|f_n(x) - f(x)|$ の最大値 $\max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)|$ が 0 に収束するとき，つまり $\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$ であるとき，関数列 $f_n(x)$ は関数 $f(x)$ に一様収束するという．x ごとに収束することを，各点収束とか単純収束とよぶ．

一様収束すれば，積分と極限の順序を交換できる。

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^x f(x)dx - \int_a^x f_n(x)dx\right| \le \int_a^x |f(x)dx - f_n(x)|dx \\ \le\ & \int_a^x \max_{a\le x\le b} |f(x)dx - f_n(x)|dx \le \max_{a\le x\le b} |f(x)dx - f_n(x)|(b-a) \to 0\ (n \to \infty). \end{aligned}$$