広義積分

定積分

$a \leq x \leq b$ で定義された連続関数 $f(x)$ の積分 $\int_a^b f(x)dx$ は問題なく定義される．

条件を緩めても定義したい．

I　積分する範囲を無限にする．

II　連続でない関数も積分する．

I について．無限区間 $f(x)$ を $[a, \infty)$ で定義された連続関数とする．広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ を

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

と定義する．(a, ∞), $(-\infty, \infty)$ などについても同様に定義する．

線形性，加法性，正値性（単調性）．

例

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \text{Arctan } x - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \lim_{x\to\infty}[-e^{-x}]_0^x = 1$$

$$\int_1^\infty x^{-a}dx = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & a > 1 \text{ のとき}, \\ \infty & a \leq 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$\int_1^\infty x^{-a}dx = \lim_{t\to\infty}[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{-a+1}}{-a+1} + \frac{1}{a-1}$ ($a \neq 1$ のとき).

$\int_1^\infty x^{-1}dx = \lim_{t\to\infty}[\log x]_1^t = \lim_{t\to\infty}\log t$.

優関数による収束判定：$|f(x)| \leq g(x)$ かつ $\int_a^b g(x)dx$ が収束するなら $\int_a^b f(x)dx$ も絶対収束する．

級数の収束との比較：$f(x) \geq 0$ を $x \geq 1$ で定義された連続単調減少関数とする。数列 $a_1, a_2, \ldots$ を $a_n = f(n)$ で定義する．このとき，級数 $\sum_{n=1}^\infty$ が収束するためには，広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ が収束することが必要十分であり，

$$\int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=1}^\infty a_n \leq \int_1^\infty f(x)dx + a_1$$

がなりたつ．

$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \int_1^n f(x)dx + a_1$ である．これより従う．

例: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k}$ は $k = 1$ のとき発散し，$k \geq 2$ なら収束する．$k \geq 2$ なら $\frac{1}{k-1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k} \leq \frac{k}{k-1}$.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx$ は $k = 1$ なら発散し，$k \geq 2$ なら，$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{k-1}$.

II について．半開区間 $(a, b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ の広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx$ と定義する．$[a, b)$ についても同様．(a, b) のときは $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ と考え、それぞれが収束するとき、その和として定義する．

例

$$\int_0^1 x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} & a > -1 \text{ のとき}, \\ \infty & a \leq -1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$\int_0^1 x^a dx = \lim_{t\to 0}[\frac{x^{a+1}}{a+1}]_t^1 = \frac{1}{a+1} - \lim_{t\to 0}\frac{t^{a+1}}{a+1}$ ($a \neq -1$ のとき).

$\int_0^1 x^{-1} dx = \lim_{t\to 0}[\log x]_t^1 = -\lim_{t\to 0}\log t$.