一変数関数の積分。いろいろな関数の積分、微分方程式、広義積分.

有理関数：部分分数展開により，次を組み合わせれば，全部できる。組み合わせるというのは、平行移動と、線形結合と帰納法のこと。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^n}dx &= \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}} & n \geq 2 \text{ のとき} \\ \log|x| & n = 1 \text{ のとき} \end{cases} \\
\int \frac{x}{(1+x^2)^n}dx &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}} & n \geq 2 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{2}\log(1+x^2) & n = 1 \text{ のとき} \end{cases} \\
\int \frac{1}{1+x^2}dx &= \mathrm{Arctan} x \\
\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx &= -\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx \\
& \quad n \geq 2 \text{ のとき}
\end{aligned}$$

そのほかの関数

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \mathrm{Arcsin}\ x \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \log(x+\sqrt{x^2-1}).
\end{aligned}$$

確めるには微分すればよい

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

式を思いつくにはどうすればよいか．$\int f(x,\sqrt{x^2-1})dx$ を求めるには，

$$x = \frac{t^2+1}{2t} = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$$

とおいて変数変換すればよい．このとき，

$$y = \frac{t^2-1}{2t},\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{t^2}) = \frac{t^2-1}{2t^2},\ t = x+y = x+\sqrt{x^2-1}$$

となるから，

$$\int f(x,\sqrt{x^2-1})dx = \int f(\frac{1+t^2}{2t},\frac{1-t^2}{2t})\frac{t^2-1}{2t^2}dt.$$

$f(x,y) = \frac{1}{y}$ のときは，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log t = \log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

変数変換を思いつくにはどうすればよいか。$y^2=x^2-1$ 漸近線は $y=\pm x$. 漸近線に平行な直線は $y=x+t$ と $x+y=t$ の 2 種類. $x+y=t$ との交点が $(x,y)=(\frac{t^2+1}{2t},\frac{t^2-1}{2t})$. つまり,

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2+1}{2t}, \\ y(t) &= \frac{t^2-1}{2t} \end{cases}$$

が, 双曲線 $x^2-y^2=1$ のパラメータ表示.

$\int f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ の計算. 今度は, 円 $x^2+y^2=1$ をパラメータ表示すればよい. 点 $(-1,0)$ と通る傾き t の直線は, 円 $x^2+y^2=1$ ともう一点で交わる. 交点の座標は, $y=t(1+x)$ を代入すれば, $t^2(1+x)=1-x$ だから, $(x,y)=(\frac{1-t^2}{t^2+1},\frac{2t}{t^2+1})$. つまり,

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2+1}{2t}, \\ y(t) &= \frac{t^2-1}{2t} \end{cases}$$

が, 双曲線 $x^2-y^2=1$ のパラメータ表示. 円周角より, $t=\tan\frac{\theta}{2}$ だから, $\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{2}(1+t^2)$. 置換積分すれば,

$$\int f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int f(\frac{t^2+1}{2t},\frac{t^2-1}{2t})\frac{2}{1+t^2}dt$$

微分方程式.

関数 $f(t)$ と, その導関数 $f'(t)$ や高次導関数が, 関係式をみたすことがわかると, そのことから, 関数 $f(t)$ を求められることがある. このようなとき, その関係式を微分方程式といい, 関数を求めることを, 微分方程式を解くという.

例 1：水漏れ

底面積が S の円筒形の容器に, 一定のはやさで水を注ぐ. 容器の底からは, たまった水の水圧に比例して水が漏れるとする. 注ぎ始めの時刻を 0 としたとき, 時刻 t でのたまった水の深さを求めよ.

解：たまった水の深さを時刻 t の関数と考え $f(t)$ で表わす. たまった水の体積は $v(t)=S\cdot f(t)$ である. 単位時間にたまる水の体積を v_0 深さが x のときに漏れる水の量を単位時間あたり a とすると, $v'(t)=v_0-af(t)$ である. これより, 微分方程式

$$S\cdot f'(t)=v_0-af(t)$$

が得られる.

解法：$x=f(t)$ とおき, 移項すると,

$$S\cdot\frac{1}{v_0-ax}\frac{dx}{dt}=1$$

である. 置換積分の公式より,

$$S\int\frac{1}{v_0-ax}dx=t+C$$

である．したがって，

$$-\frac{S}{a}\log(v_0 - ax) = t + C$$

であり，

$$x = \frac{1}{a}(v_0 - C\exp(-\frac{a}{S}t))$$

である． $t = 0$ で $x = 0$ だから，

$$f(t) = \frac{v_0}{a}(1 - \exp(-\frac{a}{S}t))$$

が解である．