**10/05**

2(多) 変数関数の微分：

・偏微分、合成関数の微分とその応用.・全微分、偏微分の順序交換。・Taylor の定理。・極大、極小.

重積分

・定義.・累次積分.・応用（面積、体積、重心など）・変数変換公式とその応用

級数

・絶対収束、条件収束.・巾級数、収束半径、項別微積分.

2 変数の関数：(参考書 7.1)

実数の対 $(x, y)$ に対し，実数 $f(x, y)$ を対応させる規則.

例　$f(x, y) = x + y, xy, e^{-x^2-y^2}, \ldots$

式で与えられている必要がないのは 1 変数のときと同様.

定義域が $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ 全体とは限らない.

例　$f(x, y) = \dfrac{x}{y}, x^y = e^{y \log x}, \ldots$

2 変数関数の可視化：

まず，定義域について，$\mathbb{R}^2$ を平面の点全体の集合と同一視する.

関数のグラフ

$\{(x, y, z)|(x, y) \in$ 定義域$, z = f(x, y)\}$ は空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合を定める．これを図示しないといけない.

例：球面の上半分 $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

平面 $z = ax + by + c$

$z = ax + by + c$ 上の点の位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

一般の場合：$z = f(x, b), z = f(a, y)$ のグラフをいっぱい書く.

2 変数関数の極限：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x, y)\right)$ や $\displaystyle\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x, y)\right)$ とは意味が違う.

例：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = 0$，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) = 0$．だが，$x = y$ としてから $x \to 0$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおけば，$\dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$。

**10/12** 2 変数関数の極限：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$ や $\displaystyle\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$ とは意味が違う．

例：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=0$．だが，$x=y$ としてから $x\to 0$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$．

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおけば，$\displaystyle\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\sin 2\theta}{2}$。

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ とは，$(x,y)\to(a,b)$ のとき $|f(x,y)-A|\to 0$ となること．$(x,y)\to(a,b)$ とは，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$ のこと．

中心を除く円板 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le r$ での，差の絶対値 $|f(x,y)-A|$ が最大値 $M(r)$ をもったとすると、$\displaystyle\lim_{r\to+0} M(r)=0$ となること．

($\varepsilon$-$\delta$ 論法でいえば，$r$ が $\delta$, $M(r)$ が $\varepsilon$．)

例：$f(x,y)=xy$ のとき．$|xy-ab|=|(x-a)(y-b)+(x-a)b+a(y-b)|\le |x-a||y-b|+|x-a||b|+|y-b||a|\le r^2+(|a|+|b|)r$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ のとき，$f(x,y)$ は $(a,b)$ で連続であるという．$f(x,y)$ が $U$ の各点で連続なとき，$f(x,y)$ は $U$ で連続という．$U$ が明らかなとき，単に $f(x,y)$ は連続であるという．

2 変数関数の微分：(参考書 7.3)

偏微分 $y$ を定数と考えて $x$ で微分する．$y=b$ とおいて，1 変数 $x$ の関数 $f(x,b)$ を考える．$f(x,b)$ を $x$ で微分する $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ これが定義されるとき，$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で $x$ について偏微分可能であるといい，その値を $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での $x$ に関する偏微分係数とよび $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ と表す．同様に，$f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での $y$ に関する偏微分係数 $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を定義する．

他の記号 $f_x(a,b), f_y(a,b)$ など．

$f(x,y)$ が各点で偏微分可能であるとき，偏導関数 $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が定義される．

例 $\displaystyle\frac{\partial xy}{\partial y}(x,y)=x$

偏微分可能でも連続とは限らない．さっきの例．

**問題** (10/12)　2 変数の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{y}{x} & x\neq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．

（１）$f(x,y)$ は連続関数であることを示せ．

（２）$a\neq 0$ のとき，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を求めよ．

（３）$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b)=0$ を示せ．

（４）$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ を示せ．

（５）$b\neq 0$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ は定義されないことを示せ．

（６）$a,b$ を定数とする．合成関数 $g(t)=f(at,bt)$ について，$g'(0)$ を求めよ．

（７）$f(x,y)$ は，$(x,y)=(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ．

**10/19** 全微分：正しい微分の定義は？微分とは1次近似のことである．$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で（全）微分可能であるとは，よく近似する1次式があること．1次式は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-c)+f(a,b)$ 以外にありえないから、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-c)+f(a,b)\right)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

$z=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-c)+f(a,b)$ で定まる平面を接平面という．

合成関数の微分、(参考書 4.4 p.128)

$f(x,y)$：2変数 $x,y$ の関数.

$g(t),h(t)$:　$t$ の関数.

合成関数とは、代入して得られる関数 $f(g(t),h(t))$ のこと.

$f(x,y)$ と $g(t),h(t)$ がどれも連続なら，合成関数 $f(g(t),h(t))$ も連続.

意味

微分 $(a,b)=(g(c),h(c))$ とし，$g(t),h(t)$ は $t=c$ で微分可能かつ $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で（全）微分可能とする．このとき，合成関数 $f(g(t),h(t))$ も $t=c$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dt}f(g(t),h(t))|_{t=c}=\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)g'(c)+\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)h'(c).$$

図形的意味：接線は接平面に含まれる．

[証明] 仮定より，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le r$ ならば

$$\begin{aligned}&\left|f(x,y)-f(a,b)-\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)(x-a)-\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)(y-b)\right|\\ \le\ & k(r)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\end{aligned}$$

をみたす関数 $k(r)\to 0$ がある．よって，$F(t)=f(g(t),h(t))$ とおくと，

$$\begin{aligned}&\left|F(t)-F(c)-\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)(g(t)-g(c))-\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)(h(t)-h(c))\right|\\ \le\ & k(r)\sqrt{(g(t)-g(c))^2+(h(t)-h(c))^2}\end{aligned}$$

両辺を$t-c$でわって，$t \to c$とすると，

$$
\begin{aligned}
& \left|\lim_{t\to c}\frac{F(t)-F(c)}{t-c} - \frac{\partial}{\partial x}f(a,b)g'(c) - \frac{\partial}{\partial y}f(a,b)h'(c)\right| \\
\leq\ & k(r)\sqrt{(g'(c)^2+h'(c)^2} \to 0.
\end{aligned}
$$

定義に基づいて全微分可能性を確めるのは結構大変．簡単な判定法がある．
偏導関数が連続なら，全微分可能．
[証明]

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) - (f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)) \\
=\ & (f(x,b) - f(a,b) - f_x(a,b)(x-a)) + (f(x,y) - f(x,b) - f_y(a,b)(y-b))
\end{aligned}
$$

第一項については、偏微分の定義より，

$$
\frac{|f(x,b)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \leq \frac{|f(x,b)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)|}{|x-a|} \to 0
$$

第二項については，平均値の定理より，

$$
f(x,y) - f(x,b) - f_y(a,b)(y-b) = (f_y(x,t) - f_y(a,b))(y-b)
$$

をみたす$t$が$y$と$b$のあいだにある．偏導関数$f_y(x,y)$が$(x,y)=(a,b)$で連続なら，$(x,y)\to(a,b)$のとき$(x,t)\to(a,b)$だから，

$$
\frac{|(f_y(x,t)-f_y(a,b))(y-b)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \leq |f_y(x,t)-f_y(a,b)| \to 0.
$$

10/26

平均値の定理

関数 $F(t)=f(a+t(x-a),b+t(y-b))$ に平均値の定理 $F(1)-F(0)=F'(t)$ を適用して,

$$\begin{aligned} & f(x,y)-f(a,b) \\ = & \frac{\partial}{\partial x}f(a+t(x-a),b+t(y-b))(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}f(a+t(x-a),b+t(y-b))(y-b). \end{aligned}$$

高次微分、

偏導関数 $f_x(x,y)$ が偏微分可能であるとき, 2 階偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y)$ が定義される. $f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y)$ も同様. 高階の偏導関数も同様に定義される.

記号 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)$ など,

順序交換、([参] 定理 6 p.118)

定理 $f(x,y)$ が 2 階連続微分可能なら, $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(ab)$

[証明] $f(x,y)-f(x,b)=g(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} & f(x,y)-f(a,y)-f(x,b)+f(a,b)=g(x)-g(a)=g'(s)(x-a) \\ = & (\frac{\partial}{\partial x}f(s,y)-\frac{\partial}{\partial x}f(s,b))(x-a)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(s,t)\right)(x-a)(y-a) \end{aligned}$$

よって, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)$ が連続なら,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,y)-f(x,b)+f(a,b)}{(x-a)(y-a)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)\right)$$

Taylor の定理。([参] 定理 12 p.132)

$$\begin{aligned} & f(a+h,b+k) \\ = & f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+ \\ & \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)h^2+f_{xy}(a,b)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(a,b)k^2+\cdots \\ & \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(n-m)!m!}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-m}\partial y^m}f(a+ht,b+kt)h^{n-m}k^m \end{aligned}$$

をみたす $0<t<1$ がある.

証明は, 1 変数 $t$ の関数 $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ に, Taylor の定理を適用すればよい.

**11/2**

2 変数関数の極値．([参] 4.5 p.138)

$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極小値をとるとは，$(a,b)$ を中心とする円を十分小さくとれば，その中のすべての点 $(x,y)$ に対し，$f(a,b)\le f(x,y)$ がなりたつこと．つまり，その円の中での最小値をとること．極大値についても同様．極値をとるとは，極小値をとるかまたは極大値をとること．

必要条件：$f(x,y)$ が偏微分可能とする．$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極値をとるなら，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$.

1 変数関数 $f(x,b),f(a,y)$ を考えれば明らか.

**定理** $f(x,y)$ が 2 階連続微分可能とする． $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とし，$A=f_{xx}(a,b),B=f_{xy}(a,b),C=f_{yy}(a,b)$ とおく．このとき，

1. $AC-B^2>0$ かつ $A>0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で真の極小値をとる

2. $AC-B^2>0$ かつ $A<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で真の極大値をとる

3. $AC-B^2<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極値をとらない

**補題** $A,B,C$ を実数とし，$f(x,y)=\frac{1}{2}(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$ とする．このとき，$A=f_{xx}(a,b),B=f_{xy}(a,b),C=f_{yy}(a,b)$ であり，

1. $AC-B^2>0$ かつ $A>0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で真の最小値をとる

2. $AC-B^2>0$ かつ $A<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で真の最大値をとる

3. $AC-B^2<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で極値をとらない

[証明] I. 平方完成

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}((Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2)\ge 0$$

すればよい.

II.　対角化

$${}^tP\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}A' & 0\\ 0 & C'\end{pmatrix}$$

すればよい.

[定理の証明] 1. Taylor の定理より,

$$\begin{aligned} & f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ = \ & \frac{1}{2}f_{xx}(a+th,b+tk)h^2+f_{xy}(a+th,b+tk)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(a+th,b+tk)k^2 \end{aligned}$$

をみたす $0 < t < 1$ がある．2 階連続微分可能だから，考えている範囲で $f_{xx}(x,y) > 0$ かつ $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 > 0$ としてよい.

$$A' = f_{xx}(a+th,b+tk), B' = f_{xy}(a+th,b+tk), C' = f_{yy}(a+th,b+tk)$$

とおくと,

$$A'h^2 + 2B'hk + C'k^2 \geq 0$$

であり，等号は $(h,k) = (0,0)$ と同値である．2．の証明も同様.

3．$AC - B^2 < 0$ なら，$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 > 0$ となる $(h,k)$ と $Ah'^2 + 2Bh'k' + Ck'^2 > 0$ となる $(h',k')$ がある．$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ とおけば，$F''(0) > 0$ である．よって，$F(t)$ は $t=0$ で極小値をとる．一方 $G(t) = f(a+h't, b+k't)$ とおけば，$G(t)$ は $t=0$ で極大値をとるから，$f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない.

**問題** (10/26)
2 変数 $x, y$ の関数

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4xy$$

について，次の問いに答えよ．
(1)　偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を求めよ．
(2)　関数 $f(x,y)$ のグラフの，$(x,y)=(1,2)$ での接平面の方程式を求めよ．
(3)　関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．
(4)　$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ の範囲での，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

問題 (10/26) の略解 **1**　(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x(x^2+y^2)-4y$.
(2)　$f(1,2)=25-8=17, f_x(1,2)=20-8=12, f_y(1,2)=40-4=36$ だから，接平面の方程式は $z=12(x-1)+36(y-2)+17=12x+36y-67$.
(3)　極値をもつための必要条件は $f_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-4y=0$ かつ $f_y(x,y)=4y(x^2+y^2)-4x=0$. これをとくと，$x=y=0$ かまたは，$x^2+y^2=1$ かつ $x=y$. したがって，極値をとる可能性のある点は，$(x,y)=(0,0),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ の 3 つ.

$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式は $-16<0$ だから，$(0,0)$ では極値をとらない. $\begin{pmatrix} f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) & f_{xy}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ f_{xy}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) & f_{yy}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ の行列式は $64>0$ だから，$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ では極小値 $1-2=-1$ をとる. $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ でも同様に極小値 $-1$ をとる.
(4)　(3) より，最小値をとりうる点は，$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ かまたは，境界上、つまり $x=\pm1$ または $y=\pm1$ をみたす点. 境界上の点での値が $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ より大きいことを示す. 対称性より，$y=1$ の場合を考えればよい. $f(x,1)=(x^2+1)^2-4x$ である. $x^2+1\geq|2x|$ であり，等号が成り立つのは $x=\pm1$ である. したがって，$f(x,1)=(x^2+1)^2-4x\geq 4x^2-4x\geq-1$ であり，2 つめの不等号で等号が成り立つのは，$x=1/2$ である. したがって，すべての $x$ に対し，$f(x,1)>-1$ であり，最小値は $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ である.

$-1<x<1,-1<y<1$ で極大値をとる点はないから，最大値をとる点は，境界上の点である. 境界上の最大値を求める. 対称性より，$y=1$ の場合を考えればよい. つまり，$f(x,1)=(x^2+1)^2-4x$ の $-1\leq x\leq1$ での最大値を求めればよい. $f_{xx}(x,1)=12x^2+4>0$ だから $f(x,1)$ は下に凸で，最大値は $f(1,1)=4$ と $f(-1,1)=8$ の大きい方 8 である.

したがって，$-1\leq x\leq1,-1\leq y\leq1$ での最大値は，$f(-1,1)=f(1,-1)=8$ であり，最小値は，$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ である.

**11/9**

多変数関数の積分・定義

・逐次積分

・応用（面積、体積、重心など）

・変数変換公式

定義 ([参] 5.1 p.146)

一般の場合は大変なので、長方形の場合に説明する．$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ とし，$f(x,y)$ を $D$ で定義された連続関数とする．$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b, c = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_m = d$ は $D$ の分割を定める．分割の細かさを $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}, c_1 - c_0, \ldots, c_m - c_{m-1}$ の最大値と定める．各小長方形 $D_{ij} = \{(x,y) | a_{i-1} \leq x \leq a_i, c_{j-1} \leq y \leq c_j\}$ 内に点 $(x_{ij}, y_{ij})$ をとる．和

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$$

の分割を細かくしたときの極限を $D$ 上の $f(x,y)$ の積分とよび,

$$\int_D f(x,y) dxdy$$

と表す．2 変数であることを強調するために重積分とよび，$\iint_D f(x,y)dxdy$ と書くこともある．これを [小平] では $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$ と書いているが，どっちが $x$ でどっちが $y$ か注意が必要.

収束について．$D_{ij}$ 上での $f(x,y)$ の最小値を $m_{ij}$, 最大値を $M_{ij}$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}). \end{aligned}$$

これより，収束は，分割を細かくしたとき

$$(M_{ij} - m_{ij} \text{の最大値})(b-a)(d-c) \to 0$$

であることからしたがう．$(M_{ij} - m_{ij})$ の最大値 $\to 0$ はコンパクト集合 $D$ 上の連続関数が一様連続であるということの帰結だが，ここでは省略する．

線型性，加法性，正値性.

計算法：I. 逐次積分．([参] 定理 6 p.150)

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \quad (1)$$

[証明] 最初の等号を示す．$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ とおくと，右辺は $\int_a^b F(x)dx$.

$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ の分割 $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b, c = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_m = d$ をとり，$a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$ をとる．$F(x_i) = \int_c^d f(x_i,y)dy = \sum_{j=1}^m \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x_i,y)dy$. 平均値の定理より，$\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x_i,y)dy = f(x_i,y_{ij})(c_j - c_{j-1})$ をみたす $c_{j-1} \leq y_{ij} \leq c_j$ がある．これより，$F(x_i) = \sum_{j=1}^m f(x_i,y_{ij})(c_j - c_{j-1})$. したがって，$\int_a^b F(x)dx$ は $\sum_{i=1}^n F(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i,y_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$ の分割を細かくしたときの極限．右辺の極限は $\int_D f(x,y)dxdy$ だから示された．

(1) の右辺をそれぞれ $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$ とも表す．

幾何的意味：体積は面積を積分すればよい．

**11/16**
$D$ が $a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)$ で定まっているとき,

$$\int_{a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy.$$

例:　単位球の体積

$$2\int_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}dy$$
$$= \int_{-1}^1 \pi(1-x^2)dx = \pi[x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

例:　[参] p.155 問 7 (2)

$$\int_{0 \le y \le x \le \pi} y\cos(x-y)dxdy = \int_0^\pi dy \int_y^\pi y\cos(x-y)dx = \int_0^\pi y[\sin(x-y)]_y^\pi dy$$
$$= \int_0^\pi y\sin ydy = [-y\cos y]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos ydy = \pi.$$
$$= \int_0^\pi dx \int_0^x y\cos(y-x)dy = \int_0^\pi ([y\sin(y-x)]_0^x - \int_0^x \sin(y-x)dy)dx$$
$$= \int_0^\pi (\int_0^x \sin ydy)dx = \int_0^\pi [-\cos y]_0^x dx = \int_0^\pi 1-\cos xdx = \pi.$$

計算法 II.　変数変換.
1 変数の場合。
平面の座標変換。極座標。

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

**11/23**　休み

**11/30**

極座標による変数変換。

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

単位球の体積

$$\begin{aligned} & 2\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi}\sqrt{1-r^2}rdrd\theta \\ = & \ 2\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}rd\theta = 4\pi\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr \\ = & \ 4\pi[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

球と円柱の共通部分.

$$\begin{aligned} & 2\int_{(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{4}}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_{0\le r\le\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2}rdrd\theta \\ = & \ 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}rdr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}rdr \\ = & \ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\cos\theta}d\theta = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta \\ = & \ \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta)d\theta = \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = & \ \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

数学III演習問題　(12/7)

**問題1**　重積分

$$I_1 = \int_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2}} x dx dy$$

を，次の方法で求めよ.

　1．先に $y$ で積分する逐次積分.

　2．先に $x$ で積分する逐次積分.

**問題2**　重積分

$$I_2 = \int_{\substack{(x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge x}} y dx dy$$

を，次の方法で求めよ.

　1．先に $y$ で積分する逐次積分.

　2．先に $x$ で積分する逐次積分.

　3．極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で変数変換し，さらに先に $r$ で積分する逐次積分.

　4．極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で変数変換し，さらに先に $\theta$ で積分する逐次積分.

　5．

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\substack{x^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge x+1}} y dx dy \\ &= \int_{\substack{x^2 + y^2 \le 1 \\ x \le 0, y \ge 0}} y dx dy - \int_{\substack{y \le x+1 \\ x \le 0, y \ge 0}} y dx dy \end{aligned}$$

を使い、さらに右辺第1項を極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で変数変換.

**略解** (12/7)　**1**　1．

$$I_1=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} xdy=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

2．
$$I_1=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 xdx=\int_0^1 \frac{1-y}{2}dy=\frac{1}{4}.$$

**2**　1．

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-(x-1)^2}} ydy=\int_0^1 \frac{1}{2}(1-(x-1)^2-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x-\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})=\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2．

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} ydx=\int_0^1 y(y-1+\sqrt{1-y^2})dy \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy. \end{aligned}$$

$y=\sin\theta$ とおくと，さらに

$$I_2=-\frac{1}{6}+\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta=-\frac{1}{6}+\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

3．$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと，条件 $(x-1)^2+y^2\le 1$ は $r^2-2r\cos\theta\le 0$．すなわち $0\le r\le 2\cos\theta$．また，条件 $y\ge x$ は $\theta\ge\pi/4$ だから，

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\substack{0\le r\le 2\cos\theta \\ \pi/4\le\theta\le\pi/2}} r\sin\theta rdrd\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta dr \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{8}{3}\cos^3\theta\cdot\sin\theta d\theta=-\left[\frac{2}{3}\cos^4\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

４．

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\substack{0 \le r \le 2\cos\theta \\ \pi/4 \le \theta \le \pi/2}} r\sin\theta r dr d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{\pi/4}^{\mathrm{Arccos}\frac{r}{2}} r^2 \sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 [-\cos\theta]_{\pi/4}^{\mathrm{Arccos}\frac{r}{2}} dr = \int_0^{\sqrt{2}} r^2 (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{2}) dr = \frac{\sqrt{2}^3}{3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}^4}{8} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

５．

$$\begin{aligned} &\int_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x \le 0, y \ge 0}} y dx dy = \int_{\substack{0 \le r \le 1 \\ \pi/2 \le \theta \le \pi}} r\sin\theta \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{1}{3}[-\cos\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\substack{y \le x+1 \\ x \le 0, y \ge 0}} y dx dy$ は，底面が等辺の長さが１の直角２等辺三角形で高さが１の三角錐の体積だから，$\dfrac{1}{6}$．よって，

$$I_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

**12/14** 休講
**12/21**

一般の場合。座標変換

$x = g(s,t), y = h(s,t)$.

対応 $(s,t) \mapsto (x,y)$ により，$st$ 平面の部分 $E$ と $xy$ 平面の部分 $D$ の間に 1 対 1 対応があるとすると，

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f(g(s,t),h(s,t))|J(s,t)|dsdt.$$

ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial g(s,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

$$J(s,t) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}\frac{\partial h(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\frac{\partial h(s,t)}{\partial s}.$$

例 1.

$$\frac{\partial(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad J(r,\theta) = r.$$

例 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = A.$$

ヤコビアンの幾何的意味：局所的な面積の拡大率

ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積 $= \left|\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|$

$$\int_{\frac{1}{2}x \le y \le 2x, x+y \le \frac{3}{2}\pi} \cos\frac{2x-y}{3} dxdy$$

$x = 2s+t, y = s+2t$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned} &= \int_{s\ge 0, t\ge 0, s+t \le \frac{\pi}{2}} \cos s \cdot 3dsdt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}-t} \cos s ds \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}-t} dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 3. \end{aligned}$$

曲面の面積。([参] p.172)

$$S = \int_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1} dxdy.$$

例　単位球の表面積 (注意：これは広義積分)

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{\left(\frac{\partial\sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy \\
&= 2\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} dxdy \\
&= 2\int_{0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 4\pi[-\sqrt{1-r^2}]_0^1 = 4\pi
\end{aligned}$$

面積の近似値　ベクトル $\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ f_x(x,y)h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ f_y(x,y)k \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積の和.

ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積 $S$. $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と直交する．よって

$$S \times (\mathbf{c}\text{ の長さ}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\text{ のはる平行 6 面体の体積}) = |\det(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})|.$$

$$S = (1+a^2+b^2)/\sqrt{1+a^2+b^2} = \sqrt{1+a^2+b^2}.$$

**1/11**

巾級数展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

等比級数の和の公式より、$|x| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

がなりたつ。これを項別積分して

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

導きたい。

巾級数：一般に数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ に対し、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を巾級数とよぶ。

一般に，巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について次がなりたつ。

**定理 1** 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し，次のどちらかがなりたつ.

1．次の性質をみたす実数 $r \geq 0$ がある.
$|x| < r$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束し，$|x| > r$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する.

2．すべての実数 $x$ に対し，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する.

**定義**　1 のとき，$r$ を巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と呼ぶ。2 のときは，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $\infty$ であるという.

例。巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は $\infty$ である。$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 である。

収束半径の計算

**命題 1** $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ (あるいは $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = l$) が存在すれば、$r = \dfrac{1}{l}, (l \neq 0)$, $r = \infty, (l = 0)$。

巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の微積分。

**定理 2** $r$ を巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とする。このとき、次がなりたつ。

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径も $r$ である。

2. $-r < x < r$ に対し、関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定めると、$f(x)$ は $-r < x < r$ で微分可能であり、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

がなりたつ。

$$\mathrm{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

# 数学 III 演習問題　(1/11)

**問題**　巾級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$$

について，次の問いに答えよ.

1．収束半径 $r$ を求めよ.

2．$x < |r|$ に対し，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$ とおく．$f''(x)$ を $x$ の有理式で表わせ.

3．$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x$ を示せ.

**1/18**

数列の収束。

数列の収束について重要な性質は,「有界な単調増加数列は収束する」ということである．この性質の重要な点は、数列の極限の値を知らなくても、その極限を考えることができるところにある.

級数の数列：級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは，その部分和の数列 $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ が収束するということである.

上の性質の帰結として，部分和の数列 $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ が有界ならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束することが導かれる．このとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという.

絶対収束しなくても収束する数列はある．このとき条件収束するという. たとえば，$a_n \to 0, a_n > 0$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する．たとえば, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \log 2$ である.

上の性質を使って，次のことが導ける．$|a_n| \leq b_n$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．これを優級数による収束判定法という.

[定理 1 の証明] 実数 $x, y$ に対し，$|x| < |y|$ とすると，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ が収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束することだけ示す.

$a_n y^n \to 0$ だから，実数 $M$ を十分大きくとれば，すべての $n$ に対し $|a_n y^n| \leq M$ がなりたつ．$|a_n x^n| \leq M\dfrac{|x|^n}{|y|^n}$ だから、優級数の方法により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する。

[命題 1 の証明] $|x| < 1/l$ とすると、$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1$. よって自然数 $m$ と実数 $0 < s < 1$ で，$n \geq m$ なら $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \leq s$ をみたすものがある. $n \geq m$ に対し，$|a_n x^n| \leq |a_m x^m| s^{n-m}$ となるから，優級数の方法により収束する．$x > 1/l$ なら、$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > 1$ だから、$|a_n x^n| \to \infty (n \to \infty)$,

[定理 2 の証明] 1．$r'$ を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径とする.

(1) $|x| < r$ なら，$n a_n x^{n-1} \to 0 (n \to \infty)$ であることと,

(2) $|x| < r'$ なら，$a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$ であること

をいえば十分である．(2) を示す．$|x| < r'$ なら，$a_n x^{n-1} \to 0 (n \to \infty)$ だから，$a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$ である．(1) を示す．$|x| < t < r$ なら，$n \geq N$ なら $|a_n t^n| < 1$ がなりたつ $N$ があり、

$$|na_n x^{n-1}| \leq n(\frac{|x|}{t})^{n-1} t \to 0 \ (n \to \infty)$$

2．$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ とおく。

連続。$|x|, |a| \leq s < t < r$ とする。$n \geq N$ なら $|a_n| t^n \leq 1$ となるように $N$ をとる．$n \geq N$ とすると、

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| t^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^k = \left(\frac{s}{t}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{s}{t}} (= \varepsilon_n \text{とおく}) \end{aligned}$$

がなりたつ。$x = a$ についても同様。よって

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f(a) - f_n(a)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(a)| + 2\varepsilon_n \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| \leq 2\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

積分。$F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ とおく。$|x| \leq t < r$ とする。

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x f_n(x)dx + \int_0^x (f(x) - f_n(x))dx$$

であり,

$$|\int_0^x (f(x) - f_n(x))dx| \leq \int_0^x |f(x) - f_n(x)|dx \leq \varepsilon_n |x| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

微分。　巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ に上の結果を適用すればよい。

他の関数の巾級数展開。

([1] p.44 例 20(5), p.194 例題 3, [2] p.73, [3] p.239 例 5.11.)

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n \\ &= 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4+\cdots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}, \\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots.\end{aligned}$$

([1] p.195 問 11(3), [2] p.75, [3] p.239 例 5.14.)

$$\begin{aligned}\mathrm{Arcsin}x &= \int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}x^{2n}\right)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n\cdot(2n+1)}x^{2n+1} \\ &= x+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\cdots.\end{aligned}$$

微分方程式：([1] p.197, [2] p.134.)
$f(x)$ と $f'(x)$（やさらに高次の導関数）を含む方程式.
微分方程式を解く：方程式をみたす関数 $f(x)$ を求める.
例　$f'(x)=f(x)$. 解は $f(x)=Ce^x$($C$ は定数）.

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0$$

より、$\dfrac{f(x)}{e^x}$ は定数.
一般には、方程式だけで $f(x)$ は一意的には定まらない。
初期条件：いくつかの値 $f(a), f'(a)$ 等を指定する.
例　方程式 $f'(x)=f(x)$，初期条件 $f(0)=1$．解は $f(x)=e^x$.
$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の別証明. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は $f'(x)=f(x)$、$f(0)=1$ をみたす。
$(1+x)^a$ は $-1<x<1$ で定義され，初期条件 $f(0)=1$ をみたす、微分方程式 $(1+x)f'(x)=af(x)$ のただ 1 つの解.

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^a}\right)' = \frac{(1+x)^a f'(x) - a(1+x)^{a-1}f(x)}{(1+x)^{2a}} = \frac{(1+x)f'(x) - af(x)}{(1+x)^{a+1}} = 0$$

より、$\dfrac{f(x)}{(1+x)^a}$ は定数.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ の収束半径は $|\binom{a}{n+1}/\binom{a}{n}| = |\frac{a-n}{n+1}| \to 1$ だから 1．したがって $-1 < x < 1$ で関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ が定義される．これは初期条件 $f(0) = 1$ をみたし、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}nx^{n-1}.$$

$n\binom{a}{n} = a\binom{a-1}{n-1}$, $\binom{a-1}{n-1} + \binom{a-1}{n} = \binom{a}{n}$ だから,

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a\binom{a-1}{n-1} + a\binom{a-1}{n})x^n = a\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n = af(x).$$

よって、

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$