12/3

多変数関数の積分

・定義

・逐次積分

・応用（面積、体積、重心など）

・変数変換公式

計算法：I. 逐次積分.（[高・加] 定理 6 p.150, [金子]II 定理 7.4 p.76, [小平]II 定理 7.3 p.323)

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \quad (1)$$

[証明] 最初の等号を示す．$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ とおくと，右辺は $\int_a^b F(x)dx$.

$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ の分割 $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b, c = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_m = d$ をとり，$a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$ をとる．$F(x_i) = \int_c^d f(x_i,y)dy = \sum_{j=1}^m \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x_i,y)dy$. 平均値の定理より，$\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x_i,y)dy = f(x_i,y_{ij})(c_j - c_{j-1})$ をみたす $c_{j-1} \leq y_{ij} \leq c_j$ がある．これより，$F(x_i) = \sum_{j=1}^m f(x_i,y_{ij})(c_j - c_{j-1})$. したがって，$\int_a^b F(x)dx$ は $\sum_{i=1}^n F(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i,y_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$ の分割を細かくしたときの極限．右辺の極限は $\int_D f(x,y)dxdy$ だから示された.

(1) の右辺をそれぞれ $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$ とも表す.

幾何的意味：体積は面積を積分すればよい.

D が $a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)$ で定まっているとき，

$$\int_{a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy.$$

例:　単位球の体積

$$2\int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}dy$$
$$= \int_{-1}^1 \pi(1-x^2)dx = \pi[x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

例:　[高・加] p.155 問 7 (2)

$$
\begin{aligned}
& \int_{0\leq y\leq x\leq \pi} y\cos(x-y)dxdy = \int_0^\pi dy \int_y^\pi y\cos(x-y)dx = \int_0^\pi y[\sin(x-y)]_y^\pi dy \\
= \quad & \int_0^\pi y\sin y dy = [-y\cos y]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos y dy = \pi. \\
= \quad & \int_0^\pi dx \int_0^x y\cos(y-x)dy = \int_0^\pi ([y\sin(y-x)]_0^x - \int_0^x \sin(y-x)dy)dx \\
= \quad & \int_0^\pi (\int_0^x \sin y dy)dx = \int_0^\pi [-\cos y]_0^x dx = \int_0^\pi 1-\cos x dx = \pi.
\end{aligned}
$$