11/26 講義予定

多変数関数の積分・定義

・逐次積分

・応用（面積、体積、重心など）

・変数変換公式

定義 ([高・加] 5.1 p.146, [金子]II 7.2 p.72, [小平]II 7.1 p.317)

一般の場合は大変なので、長方形の場合に説明する．$D=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$ とし，$f(x,y)$ を D で定義された連続関数とする．$a=a_0\le a_1\le\cdots\le a_n=b, c=c_0\le c_1\le\cdots\le c_m=d$ は D の分割を定める．分割の細かさを $a_1-a_0,\dots,a_n-a_{n-1},c_1-c_0,\dots,c_m-c_{m-1}$ の最大値と定める．各小長方形 $D_{ij}=\{(x,y)|a_{i-1}\le x\le a_i, c_{j-1}\le y\le c_j\}$ 内に点 (x_{ij},y_{ij}) をとる．和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij},y_{ij})(a_i-a_{i-1})(c_j-c_{j-1})$$

の分割を細かくしたときの極限を D 上の $f(x,y)$ の積分とよび,

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

と表す．2 変数であることを強調するために重積分とよび，$\iint_D f(x,y)dxdy$ と書くこともある．これを [小平] では $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$ と書いているが，どっちが x でどっちが y か注意が必要.

収束について．D_{ij} 上での $f(x,y)$ の最小値を m_{ij}, 最大値を M_{ij} とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(a_i-a_{i-1})(c_j-c_{j-1}) &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij},y_{ij})(a_i-a_{i-1})(c_j-c_{j-1})\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(a_i-a_{i-1})(c_j-c_{j-1}).\end{aligned}$$

これより，収束は，分割を細かくしたとき

$$(M_{ij}-m_{ij}\text{の最大値})(b-a)(d-c)\to 0$$

であることからしたがう．$(M_{ij}-m_{ij})$ の最大値 $\to 0$ はコンパクト集合 D 上の連続関数が一様連続であるということの帰結だが，ここでは省略する.

線型性，加法性，正値性.

計算法：I. 逐次積分. ([高・加] 定理 6 p.150, [金子]II 定理 7.4 p.76, [小平]II 定理 7.3 p.323)

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \qquad (1)$$