11/12 講義予定

順序交換、([高・加] 定理 6 p.118, [金子]II 定理 6.2 p.56, [小平]II 定理 6.7 p.272)

定理 $f(x,y)$ が 2 階連続微分可能なら，$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(ab)$

[証明] $f(x,y) - f(x,b) = g(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} & f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b) = g(x) - g(a) = g'(s)(x-a) \\ = \ & (\frac{\partial}{\partial x} f(s,y) - \frac{\partial}{\partial x} f(s,b))(x-a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(s,t)\right)(x-a)(y-a) \end{aligned}$$

よって，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$ が連続なら，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b)}{(x-a)(y-a)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\right)$$

Taylor の定理。([高・加] 定理 12 p.132, [金子]II p.22, [小平]II §6.2 f) p.284)

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) \\ = \ & f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \\ & \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)h^2 + f_{xy}(a,b)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)k^2 + \cdots \\ & \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(n-m)!m!} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m} \partial y^m} f(a+ht, b+kt) h^{n-m} k^m \end{aligned}$$

をみたす $0 < t < 1$ がある．

証明は，1 変数 t の関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ に，Taylor の定理を適用すればよい．

2 変数関数の極値．([高・加] 4.5 p.138, [金子]II 6.3 p.11, [小平]II なし)

$f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極小値をとるとは，(a,b) を中心とする円を十分小さくとれば，その中のすべての点 (x,y) に対し，$f(a,b) \leq f(x,y)$ がなりたつこと．つまり，その円の中での最小値をとること．極大値についても同様．極値をとるとは，極小値をとるかまたは極大値をとること．

必要条件：$f(x,y)$ が偏微分可能とする．$f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値をとるなら，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

1 変数関数 $f(x,b), f(a,y)$ を考えれば明らか．