10/29 講義予定

$f(x,y)$ が各点で偏微分可能であるとき，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が定義される．

例 $\dfrac{\partial xy}{\partial y}(x,y)=x$

定義に基づいて全微分可能性を確めるのは結構大変．簡単な判定法がある．

偏導関数が連続なら，全微分可能．

[証明]

$$\begin{aligned} & f(x,y)-(f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)) \\ = \ & (f(x,b)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a))+(f(x,y)-f(x,b)-f_y(a,b)(y-b)) \end{aligned}$$

第一項については、偏微分の定義より，

$$\frac{|f(x,b)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \le \frac{|f(x,b)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)|}{|x-a|} \to 0$$

第二項については，平均値の定理より，

$$f(x,y)-f(x,b)-f_y(a,b)(y-b)=(f_y(x,t)-f_y(a,b))(y-b)$$

をみたす t が y と b のあいだにある．偏導関数 $f_y(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続なら，$(x,y)\to(a,b)$ のとき $(x,t)\to(a,b)$ だから，

$$\frac{|(f_y(x,t)-f_y(a,b))(y-b)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y^b)^2}} \le |f_y(x,t)-f_y(a,b)| \to 0.$$