5/7 講義予定

微分とは？　一次近似

定義

$$\frac{f(x+h)-(f(x)+f'(x)h)}{h} \to 0 \qquad (h \to 0).$$

平均値の定理 ([1] p.38 定理 9, [2] p.77 定理 3.2, [3] p.119 定理 3.5)

$$f(x+h) = f(x) + f'(\alpha)h$$

をみたす α がある。

一般化　$g'(x) \neq 0$ なら、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

をみたす c が a と b の間にある。

証明 $F(x) = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$ とおくと、$F(a) = F(b) = 0.$ よって、$F'(c) = 0$ をみたす c が a と b の間にある。$F'(x) = (g(b)-g(a))f'(x) - (f(b)-f(a))g'(x)$ だから OK。

積分型の平均値の定理 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ をみたす $a \leq c \leq b$ がある。

最大値を M、最小値を m とすると $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. 中間値の定理より, $f(c) = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$ をみたす $a \leq c \leq b$ がある。

もっとよい近似を得るには？　Taylor 展開

高次導関数 ([1] p.32-35, [2] p.95-97, [3] p.127-132)

e^x, $\sin x$, etc.

Leipniz' rule ([1] p.34 定理 6, [2] p.96 定理 3.6, [3] p.127 定理 3.11)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(q)}.$$

Taylor の定理 ([1] p.40 定理 11, [2] p.83-84, [3] p.132 定理 3.14)

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) &+ f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots \\ &+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

をみたす t が a と x の間にある。

証明　$x \geq a$ の場合を考える。

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right)$$

とおく。$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ だから、平均値の定理の一般化を繰り返し適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{F'(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n} = \frac{F^{(2)}(x_2)}{(n+1)n(x_2-a)^{n-2}} = \cdots \\ &= \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

をみたす $x \geq x_1 \geq x_2 \cdots x_{n+1} = t \geq a$ がある。

積分型の剰余項 ([2] p.85)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\
&= f(a) - [(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) - [\frac{(x-t)^2}{2} f^{(2)}(t)]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)dt \\
&\cdots \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \\
&\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt
\end{aligned}
$$