4/30 講義予定

中間値の定理 ([1] p.11 定理 7, [2] p.44 定理 2.5, [3] p.82 定理 2.2)

$f(x)$ を $a \leq x \leq b$ で定義された連続関数とする。c が $f(a) \leq c \leq f(b)$ を満たすならば、$f(x) = c, a \leq x \leq b$ をみたす実数が存在する。

最大値の定理 ([1] p.36 定理 7, [2] p.45 定理 2.6, [3] p.85 定理 2.4)

$a \leq x \leq b$ で定義された連続関数 $f(x)$ は、$a \leq x \leq b$ で最大値をもつ。つまり $a \leq c \leq b$ をみたす実数で、任意の実数 $a \leq x \leq b$ に対し、$f(x) \leq f(c)$ をみたすものが存在する。

実数の連続性のいいかえ、その３ ([1] p.2, [2] p.48 定理 2.7, [3] p.36)

実数の集合 S が上に有界かつ空でなければ、上限をもつ。

上に有界：自然数 M で、任意の $x \in S$ に対し $x \leq M$ をみたすものがある。

上限：$s = \sup S$ が S の上限であるとは、任意の $x \in S$ に対し $x \leq s$ がなりたちかつ s は S の元の極限として表せる。つまり、$s = \lim_{n\to\infty} x_n$ をみたす S の元からなる数列 $x_n \in S; n = 1, 2, 3, \ldots$ が存在する。

いいかえ、その 3⇒ 中間値の定理 $S = \{a \leq x \leq b | f(x) \leq c\}$ とおく。$a \in S$ だから S は空でなく、$x \in S$ なら $x \leq b$ だから S は有界。

$s = \sup S$ とおき $f(s) = c$ を示す。$x > s$ なら $x \notin S$ だから $f(x) > c$。したがって $f(s) \geq c$. 一方 $\lim_{n\to\infty} x_n = s, x_n \in S$ とすると $f(x_n) \leq c$ より $f(s) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq c$. よって $f(s) = c$.

実数の連続性のいいかえ、その 4

空でない有界閉集合の減少列 $S_n, n = 1, 2, \ldots$ の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ は空でない。

有界：自然数 M で、任意の $x \in S$ に対し $-M \leq x \leq M$ をみたすものがある。

閉集合：S の元からなる数列 x_n が収束するならば、その極限は必ず S にはいる。極限をとるという操作で閉じている集合ということ。

命題：S が閉集合であるためには、$S = \{x | f(x) \leq 0\}$ となるような連続関数 $f(x)$ が存在することが必要十分。

[証明] 必要。$S = \{x | f(x) \leq 0\}$ とする。$x = \lim_{n\to\infty} x_n, x_n \in S$ ならば、$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$. よって $x \in S$.

十分。$f(x) = \inf\{|x - y| | y \in S\}$ とおけばよい。

いいかえ、その 4⇒ 最大値の定理 $T = \{f(x) | a \leq x \leq b\}$ とおく。T が上に有界なことを示す。$S_n = \{a \leq x \leq b | f(x) \geq n\}$ とおく。S_n は有界閉集合であり、$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$. したがって $S_n = \emptyset$ をみたす n がある。よって T は有界。

$t = \sup T$ とおく。$t = f(x)$ をみたす $a \leq x \leq b$ があることを示す。$S_n = \{a \leq x \leq b | f(x) \geq t - \frac{1}{n}\}$ とおく。$S_n \neq \emptyset$ だから $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ とればよい。

最大値の定理 ⇒ いいかえ、その 4 $a = 0, b = 1$ とする。$0 \leq x \leq 1$ に対し、連続関数 $f_n(x)$ を $0 \leq f_n(x) \leq 1/2^n$ かつ $S_n = \{0 \leq x \leq 1 | f_n(x) = 1/2^n\}$ が成り立つようにとる。($f_n(x) = (1 - \inf\{|x - y| | y \in S\})/2^n$ とすればよい。) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ とおくと、$f(x)$ は連続関数で、$f(x) \geq 1$ をみたし $S_n = \{x | f(x) \geq 1 - 1/2^n\}$ がなりたつ。よって $f(x)$ の最大値は 1 だが、$f(x) = 1$ なら $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$.

実数の連続性のいいかえ、その 2（復習）上に有界な単調増加数列は収束する。

いいかえ、その 2⇒ いいかえ、その 3

M を S の上界とする。S の元 x_0 をとり、$M = M_0$ とおく。以下帰納的に、S の元 x で $x \geq (x_n + M_n)/2$ をみたすものがあれば、それを x_{n+1}, $M_{n+1} = M_n$ と

おき、なければ $x_{n+1} = x_n$, $M_{n+1} = (x_n + M_n)/2$ とおく。すると x_n は S の元からなる単調増加数列で、$s = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} M_n$ は S の上限になる。
いいかえ、その 3$\Rightarrow$ **いいかえ、その 2** $S = \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ とおけば、$\sup S = \lim_{n\to\infty} a_n$.
いいかえ、その 3$\Rightarrow$ **いいかえ、その 4** $a_n = \min S_n$ とおき、$s = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおけば、$s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$.
いいかえ、その 4$\Rightarrow$ **いいかえ、その 2** $S_n = \{a_m | m \geq n\}$ とおく。$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在しなければ、S_n は閉集合。$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ は空でない。$s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ とすると、$s = \lim_{n\to\infty} a_n$.