2002 年度 数学 IB 夏休み練習問題 (2002.7.10)

問題 1

次の定積分を求めよ。

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\tan x}\, dx.$$

(ヒント: $x = 2 \cdot \mathrm{Tan}^{-1} t$ とおいて置換積分する。)

問題 2

次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}}.$$

(ヒント: 定積分の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1} \log x dx$ と比較する。)

問題 3

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

とおく。

(1) $f(x)$ の 4 階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を x の巾級数として表せ。

(3) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする。$0 \leq x \leq 100$ をみたすすべての実数 x に対し、不等式

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \leq 10^{-10}$$

がなりたつような自然数 n のうちできるだけ小さいものを求めよ。

1. $x = 2 \cdot \mathrm{Tan}^{-1} t$ なら、$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$, $t = \tan\dfrac{x}{2}$。$\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ だから、

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\tan x}\,dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1-t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$= \left[\log t - \log(1+t^2)\right]_{1/\sqrt{3}}^{1} = \log 2 - \frac{1}{2}\log 3$$

2

$$\log \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}.$$

$\log x$ は単調増加だから、

$$\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} + \int_{1/n}^{1}\log x dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{k}{n} \leq \int_{1/n}^{1}\log x dx.$$

$\int \log x dx = x\log x - x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\dfrac{1}{n} = -\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n} = 0$ だから、極限をとって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\log x dx = \lim_{n\to\infty}[x\log x - x]_{1/n}^{1} = -1.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}} = \frac{1}{e}$$

3 (1)

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{x}{\sqrt{2}} = e^{-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4}\right).$$

帰納法で

$$f^{(n)}(x) = e^{-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3n\pi}{4}\right)$$

が示せるから、

$$f^{(4)}(x) = -f(x).$$

(2) $f(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^n}{\sqrt{2}^n}\right)\cdot\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{2^n}\right)$ だから、$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ をみたす数

列 a_n がある。$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ で

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) = \begin{cases} 1 & n\text{ が }8\text{ でわりきれるとき} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & n\text{ が }8\text{ でわったあまりが }1\text{ か }7\text{ のとき} \\ 0 & n\text{ が }8\text{ でわったあまりが }2\text{ か }6\text{ のとき} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & n\text{ が }8\text{ でわったあまりが }3\text{ か }5\text{ のとき} \\ -1 & n\text{ が }8\text{ でわったあまりが }4\text{ のとき} \end{cases}$$

だから、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)\right).$$

(3) Taylor の定理より、0 と x の間に $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = \dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}x^n$ をみたす実数 t がある。$0 \le t \le x \le 100$ であり、(1) より $|f^{(n)}(t)| \le e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \le 1$ だから、

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| = \left|\frac{f^{(n)}(t)}{n!}x^n\right| \le \frac{100^n}{n!}.$$

したがって $\dfrac{100^n}{n!} \le 10^{-10}$ となる n をみつければよい。

講義中にやったように、$n! \ge \left(\dfrac{n}{e}\right)^n e$ であり、さらに $n \ge 272 > 100e$ とすれば、$\left(\dfrac{100e}{n}\right)^n < \dfrac{1}{e^{n-100e}}$. よって

$$\frac{100^n}{n!} \le \left(\frac{100e}{n}\right)^n e^{-1} < \frac{1}{e^{n-100e+1}}.$$

したがって不等式 $\dfrac{100^n}{n!} \le 10^{-10}$ がなりたつためには、$\dfrac{1}{e^{n-100e+1}} \le 10^{-10}$、つまり

$$n - 100e + 1 \ge 10\log 10$$

となっていればよい。$e = 2.71828....,\ \log 10 = 2.30258...$ だから、

$$n \ge 271.828... - 1 + 23.0258... = 293.85..$$

よって $n \ge 294$ ならよい。

別解。

$$\begin{aligned}\frac{100^{374}}{374!} &< \frac{100^4}{4!}\cdot 20^5 \cdot 10^{10} \cdot 5^{30} \cdot 2^{50} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{50} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{50} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{25} \\ &= \frac{2^{25}\cdot 5^3}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{50}\left(\frac{2}{7}\right)^{25} = \frac{5^3}{3}\left(\frac{64}{567}\right)^{25} < 8^{-23} < 10^{-10}\end{aligned}$$

だから、$n \ge 374$ で十分。