2002年度 数学IB期末試験問題

理科1類 4,8-9,16組　9月4日2限 10:50-12:20 (90分)　　斎藤　毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　両面2枚、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

・問題に特に指示のない限り、途中の計算などもできる限りくわしく書いて下さい。

問題1 (1) $x(t) = 2 \cdot \mathrm{Tan}^{-1} t$ とする。導関数 $\dfrac{dx(t)}{dt}$ を求めよ。（答だけでよい。）

(2) 次の定積分を求めよ。

$$-\int_{2\pi/3}^{5\pi/6} (\tan\frac{x}{2}) \cdot (\tan x)\ dx$$

問題2 (1) 区間 $[1, 2]$ を n 等分したときに得られる、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x dx$ の近似値を1つ与えよ。（答だけでよい。）

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{3}{n}\right) \cdots \left(1+\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

を求めよ。

問題3　$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}$ とおく。

(1) $f(x)$ の3階導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対し、$x \geq 0$ なら $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ がなりたつことを示せ。

(3) $0 \leq x \leq 10$ をみたすすべての実数 x に対し, 不等式

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq 10^{-5}$$

が成り立つような自然数 n のうちできるだけ小さいものを求めよ。

1. (1)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2.}$$

(2) $t = \tan\frac{x}{2},\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},\ \tan\frac{5\pi}{12} = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3}$ だから、

$$\begin{aligned}
&-\int_{2\pi/3}^{5\pi/6} (\tan\frac{x}{2})\cdot(\tan x)\ dx = -\int_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} t\cdot\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}dt = \left[2\mathrm{Tan}^{-1}t - \log\frac{t+1}{t-1}\right]_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \\
&= \left(\frac{5\pi}{6} - \log\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2\pi}{3} - \log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{\pi}{6} + \log(2+\sqrt{3}) - \log\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2 (1)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log(1+\frac{i}{n})$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\log\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log(1+\frac{i}{n}) = \int_1^2 \log x dx = [x\log x - x]_1^2 = 2\log 2 - 1
\end{aligned}$$

だから、答は $\frac{4}{e}$.

3 (1)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} = e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{2}{3}\pi\right).$$

同様に

$$f''(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{4}{3}\pi\right),\quad f^{(3)}(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+2\pi\right) = f(x).$$

(2) (1) より、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x) & n \text{ が } 3 \text{ でわりきれるとき} \\ f'(x) & n \text{ を } 3 \text{ でわったあまりが } 1 \text{ のとき} \\ f''(x) & n \text{ を } 3 \text{ でわったあまりが } 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。どの場合も $x \geq 0$ なら

$$|f^{(n)}(x)| \leq e^{-\frac{x}{2}} \leq 1.$$

(3) Taylor の公式により、

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(n)}(t)}{n!} x^n$$

をみたす実数 $0 \leq t \leq x$ がある。$0 \leq x \leq 10$ だから、(2) より

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \frac{f^{(n)}(t)}{n!} x^n \right| \leq \frac{10^n}{n!}.$$

したがって

$$\frac{10^n}{n!} \leq 10^{-5}$$

となる n をみつければよい。

$n! \geq \left(\dfrac{n}{e}\right)^n e$ であり、さらに $n \geq 28 > 10e$ とすれば、$\left(\dfrac{10e}{n}\right)^n < \dfrac{1}{e^{n-10e}}$ だから、

$$\frac{10^n}{n!} \leq \left(\frac{10e}{n}\right)^n e^{-1} < \frac{1}{e^{n-10e+1}}.$$

したがって不等式 (1) がなりたつためには、$\dfrac{1}{e^{n-10e+1}} \leq 10^{-5}$、つまり

$$n - 10e + 1 \geq 5 \log 10$$

となっていればよい。$e = 2.718...,\ \log 10 = 2.30...$ だから、

$$n \geq 27.18... - 1 + 11.50... = 37.6..$$

よって $n \geq 38$ ならよい。

別解。

$$\frac{10^{39}}{39!} < \frac{10^4}{4!} \cdot 2^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{1}{2^5} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \frac{1}{3^5} \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{2}{15} \left(\frac{8}{63}\right)^5 < \frac{2 \cdot 4^5}{15 \cdot 30^5} = \frac{32}{45} \frac{64}{81} \frac{1}{10^5} < 10^{-5}$$

だから、$n \geq 39$ で十分。