数学 IB 演習問題 (2002.6.19)

問題 6.1 連続微分可能な曲線 $C:(x(t),y(t)), a \le t \le b$ の長さの公式 (証明は問題 6.5)

$$(\ C \text{ の長さ}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$

を使って,

$$\mathrm{Sin}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

を次のようにして示せ。

1. $0 \le b \le 1$ とする。パラメータつき曲線 C_b

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2} \\ y(t) = t \end{cases}$$

$0 \le t \le b$ を図示せよ。

2. 曲線 C_b の長さを t に関する積分として表わせ。
3. 2 の積分を使って、公式 $\mathrm{Sin}^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を導け。

問題 6.2 次の定積分を求めよ。（長瀬・芦野 微分積分概説 サイエンス社 演習問題 p.48）

$$\text{(1)} \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \qquad \text{(2)} \quad \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx \qquad \text{(3)} \quad \int_0^\pi e^{-x} \cos x dx$$

$$\text{(4)} \quad \int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \qquad \text{(5)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \qquad \text{(6)} \quad \int_0^1 x \log x dx$$

問題 6.3 次の不定積分を求めよ。（金子 微分積分 I サイエンス社 練習問題 4.1 p.107）

$$\text{(1)} \quad \int x^3 \sin x dx \qquad \text{(2)} \quad \int \frac{1}{x(\log x)(\log\log x)} dx \qquad \text{(3)} \quad \int \mathrm{Tan}^{-1} x dx$$

$$\text{(4)} \quad \int \mathrm{Sin}^{-1} x dx \qquad \text{(5)} \quad \int \frac{1}{x(x+1)} dx \qquad \text{(6)} \quad \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$$

$$\text{(7)} \quad \int \frac{1}{e^x - 1} dx \qquad \text{(8)} \quad \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \qquad \text{(9)} \quad \int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx$$

問題 6.4 問題 6.1 と同じように、パラメータつき曲線 C_b

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

$0 \leq t \leq b$ の長さを求めることにより、

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx$$

を示せ。

問題 6.5 $x(t), y(t)$ を $0 \leq t \leq 1$ で定義された連続微分可能な関数 (=微分可能で導関数も連続) とし、$C : (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1$ を連続微分可能なパラメータつき曲線とする。公式

$$(C \text{ の長さ}) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$

を、次のようにして証明せよ。

1. $0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = 1$ を閉区間 $[0, 1]$ の分割とする. $i = 0, \ldots, n$ に対し、xy 平面上の点 P_i を $(x(a_i), y(a_i))$ と定める. 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し、実数 $a_{i-1} \leq b_i, c_i \leq a_i$ で、線分 $P_{i-1}P_i$ の長さが $\sqrt{x'(b_i)^2 + y'(c_i)^2}(a_i - a_{i-1})$ となるものがあることを、平均値の定理を使って示せ。

2. 1. を使うと、C の長さは、和

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(b_i)^2 + y'(c_i)^2}(a_i - a_{i-1})$$

の、分割を細かくしたときの極限であることを示せ。

3. 定積分の定義によれば、積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$ は、和

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(b_i)^2 + y'(b_i)^2}(a_i - a_{i-1})$$

の、分割を細かくしたときの極限であることを示せ。

4. 不等式

$$|\sqrt{x'(b_i)^2 + y'(c_i)^2} - \sqrt{x'(b_i)^2 + y'(b_i)^2}| \leq |y'(c_i) - y'(b_i)|$$

を示せ。

5. 和

$$\sum_{i=1}^{n} |y'(c_i) - y'(b_i)|(a_i - a_{i-1})$$

は、分割を細かくしたとき 0 に収束することを示せ。(やり方は講義であまり説明しなかった。$y'(t)$ の一様連続性を使う。)

6. C の長さは積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$ に等しいことを示せ。