数学 IB 演習問題 (2002.6.5)

問題 5.1 関数 $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を $\sinh x$ で表わす。
1. 関数 $\sinh x$ の巾級数展開を求めよ。
2. 関数 $f(x) = \sinh x$ は次の式 (1),(2) をみたすことを示せ。

$$f'(x)^2 = f(x)^2 + 1 \tag{1}$$
$$e^x = f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 1} \tag{2}$$

3. 関数 $\sinh x$ は単調増加であり、$\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$ であることを示せ。
4. 3 を使って関数 $\sinh x$ の逆関数 $g(x)$ が任意の実数 x に対して定義されることを示せ。$g(0), g(\dfrac{e - e^{-1}}{2}), g(\dfrac{-e^{-2} + e^2}{2})$ を求めよ。
5. 逆関数の微分の公式 $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ と上の式 (1) を使って、関数 $\sinh x$ の逆関数 $g(x)$ は、

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \tag{3}$$

をみたすことを示せ。
5. 上の式 (2) を使って、$g(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ を示せ。
6. 等式

$$\log(x + \sqrt{x^2+1}) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \tag{4}$$

を、両辺を微分することにより確かめよ。
7. 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の巾級数展開を求めよ。
8. 7 と式 (4) を使って、関数 $\log(x + \sqrt{x^2+1})$ の巾級数展開を求めよ。
9. 双曲線 $y^2 = x^2 + 1$ 上の点 (x, y) に対し、$t = \dfrac{x}{y}$ を対応させることにより、双曲線 $y^2 = x^2 + 1$ 上の $y > 0$ の部分と、数直線の $-1 < t < 1$ の部分は 1 対 1 に対応することを示せ。(x, y) に t が対応するとき、x と y を t で表わせ。
10. $x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ とおいて置換積分することにより、式 (4) を示せ。

問題 5.2 関数 $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を $\cosh x$ で表わす。この関数 $\cosh x$ について問題 5.1 の各小問はどうなるか、適当に修正し、解答しなさい。