数学 IB 演習問題 (2002.5.8)

問題 3.1 $f(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ で定義された x の連続関数とする。次のようにして、$f(x)$ に対し最大値の定理を証明せよ。

1. 数列 a_n を次のように定める。

(a) 自然数 $n \geq 1$ に対し, a_n を, $x = \dfrac{k}{10^n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1)$ のうちで $f(x)$ が最大値をとるものとする。ただし、最大値をとる x が 2 個以上あったときは、そのような x のうち最小のものをとる。

もし数列 a_n が収束するならば、関数 $f(x)$ は極限 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ で最大値をとることを示せ。

2. 関数 $f(x)$ が次のように定義されている場合を考える。

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left| x - \dfrac{5}{99} \right| & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{99} + (1 - \dfrac{5}{990})\right) \text{ のとき、} \\ \\ 1 - \left| x - (1 - \dfrac{5}{990}) \right| & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{99} + (1 - \dfrac{5}{990})\right) \leq x \leq 1 \text{ のとき。} \end{cases}$$

このとき数列 a_n を求め、数列 a_n は収束しないことを示せ。

3. 一般に、数列 b_n を次のように帰納的に定める。

(b) b_1 を $\dfrac{k}{10}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 9)$ のうちで $\dfrac{k}{10} \leq a_m < \dfrac{k+1}{10}$ をみたす自然数 m が無限個あるようなものとする。b_n まで定まったとき、b_{n+1} を $b_n + \dfrac{k}{10^{n+1}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 9)$ のうちで $b_n + \dfrac{k}{10^{n+1}} \leq a_m < b_n + \dfrac{k+1}{10^{n+1}}$ をみたす自然数 m が無限個あるようなものとする。ただし、上のような k が 2 個以上あったときは、そのような k のうち最小のものをとる。

このとき数列 b_n は収束することを示せ。

4. 記号は 2. のとおりとする。数列 b_n を求めよ。関数 $f(x)$ は極限 $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ で最大値をとることを示せ。

5. 一般に、極限 $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ で $f(x)$ が最大値をもつことを示すため、数列 c_n を次のように帰納的に定める。

$b_1 \leq a_m < b_1 + \dfrac{1}{10}$ をみたす無限個の自然数 m のうち最小のものを m_1 とおき、$c_1 = a_{m_1}$ とおく。$c_n = a_{m_n}, m_n$ まで定まったとき、$b_{n+1} \leq a_m < b_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}}$ をみたす無限個の自然数 $m > m_n$ のうち最小のものを m_{n+1} とおき、$c_{n+1} = a_{m_{n+1}}$ とおく。

このとき数列 c_n は収束し、極限 $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ は $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ と等しいことを示せ。

6. 関数 $f(x)$ は $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ で最大値をとることを示せ。

問題 3.2

1. $0 \leq x$ で定義された連続関数 $f(x)$ で、最大値も最小値もとらないものの例を 1 つ与えよ。

2. $0 < x \leq 1$ で定義された連続関数 $f(x)$ で、最大値も最小値もとらないものの例を 1 つ与えよ。

3. $-1 \leq x \leq 1$ で定義されていて $x = 0$ 以外では連続な関数 $f(x)$ で、最大値も最小値もとらないものの例を 1 つ与えよ。

問題 3.3 数列 a_n が条件「すべての n に対し $0 \leq a_n \leq 1$」をみたすとする。このとき自然数の増加列 m_n で数列 $c_n = a_{m_n}$ が収束するようなものが存在することを示せ。