2010 年度第 4 学期 **代数と幾何 中間試験問題**

12 月 1 日 (水) 10:00–12:00 (120 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　1 枚（4 ページ)、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

$\mathbb{R}$ は実数体を表わし，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合を表わす.

問題 1　（解答用紙の 1-3 ページめに記入してください）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$$ とし，e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 で $\mathbb{R}^5$ の標準基底を表わす．$\mathbb{R}^5$ の自己準同形 $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ を，$f(x) = Ax$ で定める.

自然数 $n \geq 1$ に対し，$x_n \in \mathbb{R}^5$ を，$x_1 = e_1$ と $x_{n+1} = f(x_n)$ で帰納的に定める.

(1)　e_1 によって生成される f 安定部分空間 $W \subset \mathbb{R}^5$ の次元 $m = \dim W$ を求めよ.

(2)　f の W への制限 $f|_W$ が定める W の自己準同形を，$g\colon W \to W$ で表わす.
g の，基底 $x_1, \ldots, x_m$ に関する行列表示を求めよ.

(3)　g の最小多項式を求めよ．g の固有値もすべて求めよ.

(4)　g のすべての固有値に対し，固有空間の次元と一般固有空間の次元を求めよ.

(5)　$V = W + \langle e_2 \rangle$ とおく．$f(V) \subset V$ を示せ.

(6)　f の V への制限 $f|_V$ が定める V の自己準同形を，$h\colon V \to V$ で表わす.
h の最小多項式を求めよ（展開しなくてもよい）．h の固有値もすべて求めよ.

(7)　h のすべての固有値に対し，固有空間の次元と一般固有空間の次元を求めよ.

(8)　$n = \dim V$ とする．V の基底 $z_1, \ldots, z_n$ で，$z_1, \ldots, z_n$ に関する $h\colon V \to V$ の行列表示 J がジョルダン標準形となるものを 1 つ求めよ.

(9)　h の固有多項式を求めよ.（展開しなくてもよい）

些細な計算間違いが，致命的になることがあります．もう一度よく検算してください

問題 2　（解答用紙の 4 ページめに記入してください）

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ で，実数列全体のなす空間を表わす.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の自己準同形 F と D をそれぞれ，数列 $x = (x_n) = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ を，$(x_{3n}) = (x_0, x_3, x_6, \ldots)$ と $(x_{n+1}) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ にうつすことで定める.

(1)　写像 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の等式 $D \circ F = F \circ D^3$ を示せ.

(2)　$V = \mathrm{Ker}(D^4 - 1\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ とおく．$F(V) \subset V$ を示せ.

(3)　同形 $G\colon V \to \mathbb{R}^4$ を，数列 $x = (x_n)$ をベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ にうつすことで定め，$a, b, c, d \in V$ を，同形 $G\colon V \to \mathbb{R}^4$ による標準基底 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4$ の逆像とする.

F の V への制限 $F|_V$ が定める V の自己準同形を，$f\colon V \to V$ で表わす.

V の基底 a, b, c, d に関する f の行列表示 A を求めよ.

(4)　$p, q, r, s \in V$ を，$p = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$, $q = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$, $r = (1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$, $s = (0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$ で定まる V の基底とする.

a, b, c, d から p, q, r, s への底の変換行列 $P \in GL_4(\mathbb{R})$ を求めよ.

(5)　V の基底 p, q, r, s に関する f の行列表示 B を求めよ.

(6)　B を A と P を使って表わし，その式を確かめよ.

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。

また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

なるべく読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

略解　**1** (1) $x_2=Ae_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $x_3=Ax_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_4=Ax_3=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\0\\12\end{pmatrix}$ だから，x_1,x_2,x_3 は1次独立であり，$x_4=12x_2-16x_1$ である．よって，$m=\dim W=3$ である．

(2)　上の計算より，求める行列は $B=\begin{pmatrix}0&0&-16\\1&0&12\\0&1&0\end{pmatrix}$ である．

(3)　(2) より最小多項式は $X^3-12X+16$ である．
$X^3-12X+16=(X-2)^2(X+4)$ だから，g の固有値は $2,-4$ である．

(4)　$W_2=\langle(A-2)(A+4)e_1\rangle$, $\widetilde{W}_2=\langle(A-2)(A+4)e_1,(A+4)e_1\rangle$, $W_{-4}=\widetilde{W}_{-4}=\langle(A-2)^2e_1\rangle$ だから，$\dim W_2=1$, $\dim\widetilde{W}_2=2$, $\dim W_{-4}=\dim\widetilde{W}_{-4}=1$ である．

別解：(2) より g の固有多項式も $X^3-12X+16=(X-2)^2(X+4)$ である．よって，$\dim\widetilde{W}_2=2$, $\dim\widetilde{W}_{-4}=1$ である．$0\neq W_{-4}\subset\widetilde{W}_{-4}$ だから，$\dim W_{-4}=1$ である．g の最小多項式 $(X-2)^2(X+4)$ は相異なる1次式の積でないから，g は対角化可能でない．したがって，$0\subsetneqq W_2\subsetneqq\widetilde{W}_2$ であり，$\dim W_2=1$ である．

(5)　$Ae_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\1\\3\end{pmatrix}=2e_2-8x_1+2x_2+x_3\in V$ である．よって $f(V)\subset V$ である．

(6)　上の計算より，$(A-2)e_2=(A^2+2A-8)e_1$ だから，$(A-2)^2e_2=(A-2)(A^2+2A-8)e_1=(A^3-12A+16)e_1=0$ である．よって，h の最小多項式は，$X^3-12X+16=(X-2)^2(X+4)$ と $(X-2)^2$ の最小公倍式 $X^3-12X+16=(X-2)^2(X+4)$ である．したがって，h の固有値も2と -4 である．

別解：上の計算より $(f^3-12f+16)(V)=0$ だから，h の最小多項式は，$X^3-12X+16$ をわりきる．h の最小多項式は，g の最小多項式 $X^3-12X+16$ でわりきれるから $X^3-12X+16$ である．

(7)　固有値 -4 に対しては，$\widetilde{V}_{-4}=\widetilde{W}_{-4}$ であり，$V_{-4}=W_{-4}$ である．よって，$\dim V_{-4}=\dim\widetilde{V}_{-4}=1$ である．$V=\widetilde{V}_2\oplus\widetilde{V}_{-4}$ だから，$\dim\widetilde{V}_2=3$ である．$x_3+2x_2-8x_1, e_2-(x_2+4x_1)\in V_2$ は1次独立であり，h の最小多項式の根2の重複度は2だから，$\widetilde{V}_2\supsetneqq V_2$ である．よって，$\dim V_2=2$ である．

(8)　$z_1=x_3+2x_2-8x_1$, $z_2=x_2+4x_1$, $z_3=e_2-z_2$, $z_4=x_3-4x_2+4x_1$ とおけば，z_1,z_2,z_3,z_4 は V の基底であり，$J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$ である．

(9)　(8) より，h の固有多項式は $(X-2)^3(X+4)$ である．

別解：(9)　(2) と (5) の計算より，h の行列表示は $\begin{pmatrix}B&*\\0&2\end{pmatrix}$ である．したがって，固有多項式は $(X-2)\cdot\det(X-B)=(X-2)^3(X+4)$ である．

(7)　(9) より，$\dim\widetilde{V}_2=3$, $\dim\widetilde{V}_{-4}=1$ である．(4) の別解と同様に $\dim V_{-4}=1$ である．さらに (6) より，$0\subsetneqq V_2\subsetneqq\widetilde{V}_2$ だから，$\dim V_2=1$ か2である．$\dim V_2=1$ とすると，$h|_{V_2}$ のジョルダン標準形は $J(2,3)$ となり最小多項式の根2の重複度が2であることに反するから，$\dim V_2=2$ である．

2 (1) 数列 $x=(x_n)=(x_0,x_1,x_2,\dots)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対し，$D(F(x))=D(x_0,x_3,x_6,\dots)=(x_3,x_6,\dots)$ であり，$F(D^3(x))=F(x_3,x_4,x_5,\dots)=(x_3,x_6,\dots)$ である．

(2) (1) より，$(D^4-1)\circ F=F\circ(D^{12}-1)$ であり，$F(\mathrm{Ker}(D^{12}-1))\subset V$ である．$V=\mathrm{Ker}(D^4-1)\subset\mathrm{Ker}(D^{12}-1)$ だから $F(V)\subset F(\mathrm{Ker}(D^{12}-1))\subset V$ である．

(3) $F(a)=(1,0,0,0,\dots)=a,\ F(b)=(0,0,0,1,\dots)=d,$

$F(c)=(0,0,1,0,\dots)=c,\ F(d)=(0,1,0,0,\dots)=b$ だから，$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ である．

(4) $P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$ である．

(5) $F(p)=p,\ F(q)=q,\ F(r)=r,\ F(s)=-s$ だから，$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ である．

(6) $PB=AP$ だから，$B=P^{-1}AP$ である．

多かった間違い：

問題１ (4), (7)　固有値 a の一般固有空間の次元は，固有多項式での根 a の重複度であり，最小多項式での根 a の重複度ではありません．

(1), (5)　ここで計算を間違えてしまうと，あとが壊滅的になってしまいます．解き方を正しく理解いると思われる答案には多少点をつけましたが，問題用紙で警告していたことでもあるので，あまり多くは期待しないでください．

問題２ (3), (5)　この問題では数列は x_0 からはじまってます．x_1 からと思うと A や B の答が違いますが，多少点をつけてあります。

(4)　底の変換行列の定義を間違って覚えていると，P の逆行列を求めてしまうことになります．これにも，多少点をつけてあります。