2010 年度第 4 学期 代数と幾何 期末試験問題

3 月 2 日 (水) 10:00–12:00 (120 分) 斎藤 毅

- 問題用紙　1 枚、解答用紙　1 枚（4 ページ)、計算用紙 1 枚
- 筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
- なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください．

$\mathbb{R}$ は実数体，$\mathbb{C}$ は複素数体を表わし，$\mathrm{Re}\ z$ は複素数 z の実部を表わす．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合を表わす．

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{45}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$

とし，e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 で $\mathbb{R}^5$ の標準基底を表わす．線形写像 $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax$ で定め，$\mathbb{R}^5$ の自己準同形 $g\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ を $g(x) = Bx$ で定める．$W = \mathrm{Ker}\ f$ とする．

(1)　$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ は商空間 $\mathbb{R}^5/W$ の基底であることを示せ．

(2)　$a = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ とする．商空間 $\mathbb{R}^5/W$ の元 $\bar{a}$ を基底 $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ の線形結合として表わせ．

(3)　g は商空間 $\mathbb{R}^5/W$ の自己準同形 $\bar{g}\colon \mathbb{R}^5/W \to \mathbb{R}^5/W$ をひきおこすことを示せ．

(4)　$\bar{g}$ の，基底 $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ に関する行列表示を求めよ．

問題 2　複素正方行列 $A \in M_2(\mathbb{C})$ の共役 A^* は，複素共役の転置 ${}^t\bar{A}$ である．$V = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^* = X\}$ で，エルミート行列全体のなす実線形空間を表わす．$A \in M_2(\mathbb{C})$ に対し，V の自己準同形 $f_A\colon V \to V$ を，$f_A(X) = A^*XA$ で定める．V の対称双線形形式 $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ を $b(X, Y) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(XY))$ で定める．

(1)　b は正定値であることを示せ．

(2)　b に関する f_A の随伴写像 f_A^* が f_B となるような $B \in M_2(\mathbb{C})$ を 1 つ求め，A で表わせ．

(3)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．b に関する V の正規直交基底で，f_A の固有ベクトルからなるものを 1 つ求めよ．

問題 3　V を e^x, e^{-x} で生成される $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間とし，W を漸化式 $a_{n+4} = a_n$ をみたす実数列 $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ 全体のなす $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ の部分空間とする．線形写像 $F\colon V \to W$ を $F(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), \ldots)$ で定める．

(1)　自然数 $i \geq 0$ に対し線形形式 $g_i\colon W \to \mathbb{R}$ を $g_i((a_n)) = a_i$ で定める．g_0, g_1, g_2, g_3 は双対空間 W^* の基底であることを示せ．

(2)　$h_1, h_2 \in V^*$ を $e^x, e^{-x} \in V$ の双対基底とする．$F\colon V \to W$ の双対写像 $F^*\colon W^* \to V^*$ の g_0, g_1, g_2, g_3 と h_1, h_2 に関する行列表示を求めよ．

(3)　F^* の核 $\mathrm{Ker}\ F^*$ の基底を 1 つ求め，それを g_0, g_1, g_2, g_3 の線形結合として表わせ．

問題 4　$\mathbb{R}$ 線形写像 $F\colon M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(X \otimes x) = Xx$ で定める．

(1)　F の階数と F の核の次元を求めよ．

(2)　$A \in GL_2(\mathbb{R})$ を可逆行列とし，$\mathbb{R}^2$ の自己同形 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x) = Ax$ で定める．$M_2(\mathbb{R})$ の自己準同形 $g\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ で，$f \circ F = F \circ (g \otimes f)$ をみたすものをすべて求めよ．

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。

また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

なるべく読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.

略解　**1** (1) $f(e_1), f(e_2)$ は像 $f(\mathbb{R}^5)$ の基底である．よって準同形定理より，$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ は商空間 $\mathbb{R}^5/W$ の基底である．

(2)　$f(a) = 3e_1 + 2e_2$ である．よって準同形定理より，$\bar{a} = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ である．

(3)　$g(W) \subset W$ を示せばよい．$W = \langle e_3 - e_1, e_5 - e_3, e_4 - e_2 \rangle$ であり，$g(e_3 - e_1) = e_4 - e_2, g(e_4 - e_2) = e_5 - e_3, g(e_5 - e_3) = -(e_3 - e_1)$ だから，$g(W) \subset W$ である．

(4)　$g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3$ だから求める行列表示は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

2　(1)　$X = \begin{pmatrix} x & y \\ \bar{y} & z \end{pmatrix} \in V$ とすると，x と z は実数であり $\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(XX)) = x^2 + 2|y|^2 + z^2$ だから，b は正定値である．

(2)　$b(f_A(X), Y) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(A^*XAY)) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(XAYA^*)) = b(X, f_{A^*}(Y))$ だから $B = A^*$ とすればよい．

(3)　$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，B, C, D, E は V の基底であり，$f_A(B) = B, f_A(C) = -C, f_A(D) = -D, f_A(E) = E$ である．基底 B, C, D, E に関する b の行列表示は $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ だから，$\frac{1}{\sqrt{2}}B, \frac{1}{\sqrt{2}}C, \frac{1}{\sqrt{2}}D, \frac{1}{\sqrt{2}}E$ は f_A の固有ベクトルからなる b に関する V の正規直交基底である．

3　(1)　$G\colon W \to \mathbb{R}^4$ を $G((a_n)) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で定めると，G は同形である．g_0, g_1, g_2, g_3 は G の双対写像による $\mathbb{R}^4$ の標準基底の双対基底の像だから，W の基底である．

(2)　求める行列表示は

$$\begin{pmatrix} g_0(F(e^x)) & g_1(F(e^x)) & g_2(F(e^x)) & g_3(F(e^x)) \\ g_0(F(e^{-x})) & g_1(F(e^{-x})) & g_2(F(e^{-x})) & g_3(F(e^{-x})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．

(3)　$g_0 - g_2, g_1 - g_3$.

4 (1)　$F(1 \otimes x) = x$ だから F は全射であり階数は 2 である．定義域の次元は $4 \times 2 = 8$ だから核の次元は 6 である．

(2)　$f \circ F = F \circ (g \otimes f)$ とは，任意の $X \in M_2(\mathbb{R})$ と $x \in \mathbb{R}^2$ に対し $f \circ F(X \otimes x) = A(X \cdot x)$ が $F((g \otimes f)(X \otimes x)) = g(X) \cdot Ax$ と等しいということである．これは任意の $X \in M_2(\mathbb{R})$ に対し $AX = g(X)A$ であることと同値だから，$g(X) = AXA^{-1}$ である..