2009 年度第 4 学期 代数と幾何 中間試験問題

11 月 25 日 (水) 9:30-12:00 (150 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

$\mathbb{R}$ は実数体を表わし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合 $\{0,1,2,\dots\}$ を表わす.

問題 1　$A = \begin{pmatrix} -16 & -4 & 16 & 5 \\ 12 & 4 & -11 & -4 \\ -16 & -4 & 16 & 4 \\ 10 & 2 & -9 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とし，$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とする．$\mathbb{R}^4$ の自己準同型 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(x) = Ax$ で定める．x_1 によって生成される $\mathbb{R}^4$ の f 安定部分空間を，W とおく．$i \geq 2$ に対し，$x_i \in \mathbb{R}^4$ を，$x_i = f^{i-1}(x_1)$ で定める.

(1)　$m = \dim W$ を求めよ.

(2)　W の自己準同形 $f|_W$ の，基底 $x_1, \dots, x_m$ に関する行列表示を求めよ.

(3)　$f|_W$ の最小多項式を求めよ.

(4)　y_1 によって生成される $\mathbb{R}^4$ の f 安定部分空間 W' の次元を求めよ.

(5)　f の最小多項式を求めよ.

(6)　f の固有値をすべて求めよ.

(7)　f のすべての固有値に対し，固有空間の次元と一般固有空間の次元を求めよ.

(8)　$\mathbb{R}^4$ の基底 z_1, z_2, z_3, z_4 で，z_1, z_2, z_3, z_4 に関する f の行列表示 J がジョルダン標準形となるものを 1 つ求めよ.

(9)　f の固有多項式を求めよ.

問題 2　$C^\infty(\mathbb{R})$ を，$\mathbb{R}$ 上定義された無限回微分可能な実数値関数全体のなす $\mathbb{R}$ 線形空間とし，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ で，実数列全体のなす $\mathbb{R}$ 線形空間を表す．線形写像 $D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ と $T\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を，それぞれ $D(f) = f'$, $T(f) = (f^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}} = (f(0), f'(0), f''(0), \dots)$ で定める．数列 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ を数列 $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ にうつす写像 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を，Δ で表わす.

(1)　写像 $C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の等式 $\Delta \circ T = T \circ D$ を示せ.

(2)　三角関数 $\cos,\ \sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ は，1 次独立であることを示せ.

(3)　W を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間 $\mathrm{Ker}(\Delta^4 - 1)$ とする．$F\colon W \to \mathbb{R}^4$ を，数列 $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in W$ をベクトル $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ にうつす線形写像とする．F は同形であることを示せ.

$\mathbb{R}^4$ の標準基底 $e_1, \dots, e_4$ の，F による逆像を $y_1, \dots, y_4 \in W$ で表わす.

(4)　$V = \langle \cos,\ \sin \rangle$ を，$\cos,\ \sin$ によって生成される $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間とする．$T(V) \subset W$ を示せ.

(5)　線形写像 $T|_V\colon V \to W$ の，V の基底 $\cos,\ \sin$ と，W の基底 $y_1, \dots, y_4$ に関する行列表示を求めよ.

略解 **1** (1) A をベクトル $a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, a_3 = Ae_3, a_4 = Ae_4 \in \mathbb{R}^4$ をならべた行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ と考えると，$x_2 = A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = a_1 + a_3 = \begin{pmatrix}-16\\12\\-16\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16\\-11\\16\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$x_3 = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = a_2 + a_4 = \begin{pmatrix}-4\\4\\-4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-4\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ であり，x_1, x_2, x_3 は 1 次独立である．

$x_4 = A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = a_1 + a_4 = \begin{pmatrix}-16\\12\\-16\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-4\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\8\\-12\\9\end{pmatrix} = -12x_1 + 8x_2 + x_3$ である．よって，$W = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ であり，$\dim W = 3$ である．

(2)　求める行列表示は，多項式 $X^3 - X^2 - 8X + 12$ の同伴行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(3)　(2) より，最小多項式は $X^3 - X^2 - 8X + 12$ である．

(4)　$Ay_1 = \begin{pmatrix}5\\-4\\4\\-1\end{pmatrix}$ であり，y_1, Ay_1 は 1 次独立である．

$A^2y_1 = \begin{pmatrix} -16 & -4 & 16 & 5 \\ 12 & 4 & -11 & -4 \\ -16 & -4 & 16 & 4 \\ 10 & 2 & -9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-4\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-80+16+64-5\\60-16-44+4\\-80+16+64-4\\50-8-36+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\-4\\7\end{pmatrix} = 6y_1 - Ay_1$ だから，$\dim W' = 2$ である．

(5)　(3) より，$f|_W$ の最小多項式は $X^3 - X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X^2+X-6)$ であり，(4) より，$f|_{W'}$ の最小多項式は X^2+X-6 である．f の最小多項式は，$(X-2)(X^2+X-6)$ と X^2+X-6 の最小公倍式 $(X-2)(X^2+X-6) = X^3 - X^2 - 8X + 12$ である．

(6)　最小多項式が $(X-2)(X^2+X-6) = (X-2)^2(X+3)$ だから，固有値は，その根 $2, -3$ である．

(7)　$0 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \widetilde{W}_2$, $W_{-3} = \widetilde{W}_{-3} \neq 0$ で，$W = \widetilde{W}_2 \oplus W_{-3}$ だから，$\dim W_2 = 1, \dim \widetilde{W}_2 = 2, \dim W_{-3} = 1$ である．同様に，$\dim W_2' = \dim W_{-3}' = 1$ である．$Ay_1 - 2y_1 = 4x_1 - 4x_2 + x_3$ だから，$W_{-3}' = (A-2)W' \subset W$ であり，$V_{-3} = W_{-3} = W_{-3}'$ である．よって，$\dim V_{-3} = \dim \widetilde{V}_{-3} = 1$ であり，$\dim \widetilde{V}_2 = 3$ である．さらに，$\widetilde{V}_2 = \widetilde{W}_2 + \widetilde{W}_2'$ だから，$\widetilde{V}_2 = \widetilde{W}_2 \oplus \widetilde{W}_2'$ であり，$\dim V_2 = 2$ である．

(8)　$z_1 = (A^2 + A - 6)x_1, z_2 = (A+3)x_1, z_3 = (A+3)y_1, z_4 = (A-2)^2x_1$ とおく．

$$z_1 = x_3 + x_2 - 6x_1 = \begin{pmatrix}1-6\\1\\-6\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\\2\end{pmatrix} \in W_2,\ z_2 = x_2 + 3x_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix} \in \widetilde{W}_2 \text{ である．}$$

$z_1 = (A-2)z_2$ であり，z_1, z_2 は $\widetilde{W}_2$ の基底である．

$z_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ は W_2' の基底である．$z_4 = x_3 - 4x_2 + 4x_1 = \begin{pmatrix} 1+4 \\ -4 \\ 4 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in W_{-3}$ であり，z_4 は W_{-3} の基底である．よって，z_1, z_2, z_3, z_4 は $\mathbb{R}^4$ の基底であり，z_1, z_2, z_3, z_4 に関する f の行列表示 $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は，f のジョルダン標準形である．

(9)　(7) より，A の固有多項式は，$(X-2)^3(X+3)$ である．

2　(1)　$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ とすると，$\Delta(T(f)) = \Delta((f^{(n)}(0))_n) = (f^{(n+1)}(0))_n$ であり，これは $T(D(f)) = T(f') = (f'^{(n)}(0))_n = ((f^{(n+1)}(0))_n$ と等しい．

(2)　$a\cos + b\sin = 0$ とすると，$a\cos(0) + b\sin(0) = a = 0$ であり，$a\cos(\frac{\pi}{2}) + b\sin(\frac{\pi}{2}) = b = 0$ である．

(3)　写像 $G\colon \mathbb{R}^4 \to W$ を，ベクトル $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を数列 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ にうつす写像とすると，G は $F\colon W \to \mathbb{R}^4$ の逆写像である．

(4)　$D^4(\cos) = \cos$ だから，(1) より $\Delta^4(T(\cos)) = T(D^4(\cos)) = T(\cos)$ である．よって，$(\Delta^4 - 1)(T(\cos)) = \Delta^4(T(\cos)) - T(\cos) = 0$ であり，$T(\cos) \in W$ である．同様に，$T(\sin) \in W$ である．T は線形だから，$T(V) = \langle T(\cos), T(\sin) \rangle \subset W$ である．

(5)　$T|_V\colon V \to W$ の，$\cos$, $\sin$ と $y_1, \dots, y_4$ に関する行列表示は，合成写像 $F \circ T|_V\colon V \to \mathbb{R}^4$ の，$\cos$, $\sin$ と，標準基底 $e_1, \dots, e_4$ に関する行列表示である．

$F \circ T|_V(\cos) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \cos' 0 \\ \cos'' 0 \\ \cos''' 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．同様に，$F \circ T|_V(\sin) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから，求める行列表示は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．