2009 年度第 4 学期 代数と幾何 追試験問題

7 月 27 日 (火) 13:30-15:30 (120 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　2 枚、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

$\mathbb{R}$ は実数体を表わす.

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 9 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$ とし，$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ とする.

$\mathbb{R}^6$ の部分空間 V を，$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ +x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{matrix} \right\}$ で定め，V の自己準同形 f を，$f(x) = Ax$ で定める．自然数 $n > 0$ に対し，$x_n = A^n x_0$ とおく.

(1)　x_0, x_1, x_2, x_3, y_0 は V の基底であることを示せ.

(2)　V の自己準同形 f の，基底 x_0, x_1, x_2, x_3, y_0 に関する行列表示を求めよ.

(3)　f の最小多項式を求めよ.

(4)　f のジョルダン標準形 J を 1 つ求めよ.

(5)　6 行 5 列行列 $B \in M_{65}(\mathbb{R})$ で，$AB = BJ$ かつ $V = \{Bx \mid x \in \mathbb{R}^5\}$ をみたすものを 1 つ求めよ.

問題 2　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R})$ とし，$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$，$b = Aa \in \mathbb{R}^3$ とおく.

$V = \mathbb{R}^4/\mathbb{R}a$, $W = \mathbb{R}^3/\mathbb{R}b$ を商空間とし，線形写像 $f\colon V \to W$ を $f(\bar{x}) = \overline{Ax}$ で定める. $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4$ と $e'_1, e'_2, e'_3 \in \mathbb{R}^3$ で標準基底を表わし，$x_i = \bar{e}_i \in V$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $y_j = \bar{e}'_j \in W$ $(j = 1, 2, 3)$ とおく.

(1)　x_1, x_2, x_3 は V の基底であり，y_1, y_2 は W の基底である．この基底に関する $f\colon V \to W$ の行列表示を求めよ.

(2)　V^*, W^* を V, W の双対空間とし，$f_1, f_2, f_3 \in V^*$ を x_1, x_2, x_3 の双対基底とする．$\mathbb{R}^3$ の線形形式 g を，$g\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a - b - c$ で定め，$\bar{g} \in W^*$ を g がひきおこす W の線形形式とする．f の双対写像 $f^*\colon W^* \to V^*$ による像 $f^*(\bar{g}) \in V^*$ を，f_1, f_2, f_3 の線形結合として表わせ.

問題 3　$V = \mathbb{R}^n$ とし，$e_1, \ldots, e_n$ を V の標準基底，V^* を V の双対空間とする．双線形写像 $F\colon V \times V^* \to M_n(\mathbb{R})$ を，ベクトル $x \in V$ と線形形式 $f \in V^*$ に対し，$F(x, f) \in M_n(\mathbb{R})$ を $f(e_1)x, \ldots, f(e_n)x$ をならべて得られる行列とおくことで定める.

(1)　双線形写像 F が定める線形写像 $V \otimes V^* \to M_n(\mathbb{R})$ は，同形であることを示せ.

(2)　線形写像 $\mathrm{Tr}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ との合成 $b = \mathrm{Tr} \circ F$ として定まる双線形形式 $b\colon V \times V^* \to \mathbb{R}$ は，非退化であることを示せ.

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注 意

答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることを，明確にしてください.

なるべく，答案用紙の1枚めに問題1を，2枚めに問題2と3を解答してください．必要なら裏面も使って結構です.

略解 **1** (1) $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 9 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，x_0, x_1, x_2, x_3, y_0 は V の基底である．

(2) $Ax_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -8 \\ 8 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 3x_0 - 8x_1 + 6x_2$，$Ay_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3x_0 - 5x_1 + x_2 + x_3 + y_0$ より，求める行列表示は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(3) (2) より，x_0 によって生成される f 安定部分空間 W への f の制限の最小多項式は $X^4-6X^2+8X-3 = (X-1)(X^3+X^2-5X+3) = (X-1)^2(X^2+2X-3) = (X-1)^3(X+3)$. y_0 によって生成される f 安定部分空間 W' への f の制限の最小多項式は $(X-1)^2$ である．$V = W+W'$ だから，f の最小多項式は $X^4 - 6X^2 + 8X - 3 = (X-1)^3(X+3)$.

(4) $b_1 = (A-1)^2(A+3)x_0 = (A^3 + A^2 - 5A + 3)x_0 = x_3 + x_2 - 5x_1 + 3x_0 = (A-1)y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = (A-1)(A+3)x_0 = (A^2 + 2A - 3)x_0 = x_2 + 2x_1 - 3x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_3 = (A+3)x_0 = x_1 + 3x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = b_2 - y_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_5 = (A-1)^3x_0 = x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと，b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 は V の基底で，b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 に関する f の行列表示は

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ である．

(5) $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{65}(\mathbb{R})$ を b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 をならべて得られる行列とすれば，$AB = BJ$ である．

2 (1) $b = Aa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，$f(x_1) = y_1$，$f(x_2) = -y_1$，$f(x_3) = -5y_1 - y_2$ である．よって，求める行列表示は $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(2) $f^*(\bar{g})(x_1) = \bar{g}(f(x_1)) = \bar{g}(y_1) = g(e_1) = 1, f^*(\bar{g})(x_2) = \bar{g}(-y_1) = -1, f^*(\bar{g})(x_3) = \bar{g}(-5y_1 - y_2) = -4$ だから，$f^*(\bar{g}) = f_1 - f_2 - 4f_3$.

（別解）$g_1, g_2 \in W^*$ を y_1, y_2 の双対基底とすると，g_1, g_2 と f_1, f_2, f_3 に関する f^* の行列表示は，${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ である．$\bar{g} = g_1 - g_2$ だから，$f^*(\bar{g}) = f_1 - f_2 - 4f_3$.

3 (1) $f_1, \ldots, f_n$ を $e_1, \ldots, e_n$ の双対基底とする．$F(e_i, f_j)$ は，行列単位 E_{ij} だから，F が定める線形写像 $V \otimes V^* \to M_n(\mathbb{R})$ は $V \otimes V^*$ の基底 $e_i \otimes f_j$ を $M_n(\mathbb{R})$ の基底 E_{ij} にうつす．

(2) (1) より，$b(e_i, f_j) = \mathrm{Tr}(E_{ij})$ である．よって，$e_1, \ldots, e_n$ と $f_1, \ldots, f_n$ に関する b の行列表示は単位行列である．