2009 年度第 4 学期 代数と幾何 期末試験問題

3 月 3 日 (水) 10:00-12:00 (120 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

$\mathbb{R}$ は実数体を表わし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合 $\{0,1,2,\dots\}$ を表わす.

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$ とし，$a = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ とする．$\mathbb{R}^6$ の部分空間 $V \supset W$ を，$V = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1+x_3+x_5 \\ = x_2+x_4+x_6 \end{matrix} \right\}$, $W = \mathbb{R}b$ で定める．V の自己準同形 f を，$f(x) = Ax$ で定める．

(1)　$\bar{a}, \overline{Aa}, \overline{A^2a}, \overline{A^3a}$ は，商空間 V/W の基底であることを示せ．

(2)　$\bar{c} \in V/W$ を，(1) の基底の線形結合として表わせ．

(3)　f は，商空間 V/W の自己準同形 $\bar{f}$ をひきおこすことを示せ．

(4)　$\bar{f}$ の，基底 $\bar{a}, \overline{Aa}, \overline{A^2a}, \overline{A^3a}$ に関する行列表示を求めよ．

問題 2　$J = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$M_2(\mathbb{R})$ の対称双線形形式 b を，$b(X,Y) = \mathrm{Tr}({}^tXJY)$ で定める．部分空間 $V \subset M_2(\mathbb{R})$ を，$W = \mathbb{R}A \subset M_2(\mathbb{R})$ の b に関する直交とする．

(1)　b の V への制限 b_V は非退化であることを示せ．

(2)　V の b_V に関する直交基底を 1 つ求めよ．

(3)　b_V の符号数を求めよ．

(4)　$B, C \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$M_2(\mathbb{R})$ の自己準同形 f を，$f(X) = BXC$ で定める．b に関する f の随伴写像 f^* が，$f^*(Y) = B'YC'$ で定まる行列 $B', C' \in M_2(\mathbb{R})$ を求めよ．

問題 3　漸化式をみたす実数列の空間 V, W を，

$V = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ 任意の $n \geq 0$ に対し $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$,

$W = \{(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ 任意の $n \geq 0$ に対し $b_{n+4} = b_{n+2} + b_n\}$

で定める．線形写像 $F\colon V \to W$ を，数列 $a = (a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in V$ を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $b_{2n} = b_{2n+1} = a_n$ で定まる数列 $b = (b_n) \in W$ にうつすことで定める．自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対し，線形形式 $f_i \in V^*$, $g_i \in W^*$ を，$f_i((a_n)) = a_i$, $g_i((b_n)) = b_i$ で定める．

(1)　f_1, f_2 は双対空間 V^* の基底であることを示せ．

(2)　$F\colon V \to W$ の双対写像 $F^*\colon W^* \to V^*$ の，基底 g_0, g_1, g_2, g_3 と f_1, f_2 に関する行列表示を求めよ．

問題 4　V を有限次元 K 線形空間とし，V^* を双対空間とする．線形写像 $e\colon V \otimes V^* \to K$ と $m\colon K \otimes V \to V$ を，それぞれ $e(x \otimes f) = f(x)$ と $m(a \otimes x) = ax$ で定める．

(1)　V の基底 $x_1, \dots, x_n$ に対し，$f_1, \dots, f_n$ を V^* の双対基底とすると，$I = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \in V^* \otimes V$ は，基底 $x_1, \dots, x_n$ のとり方によらないことを示せ．

(2)　$x \in V$ とする．合成写像 $m \circ (e \otimes 1_V)\colon V \otimes V^* \otimes V \to K \otimes V \to V$ による $x \otimes I$ の像を求めよ．

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注 意

答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることを，明確にしてください.

なるべく，答案用紙の第nページに，問題nを解答してください.

略解 **1** (1) $a = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $Aa = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $A^2a = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A^3a = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ は V の基底である．
よって，$\bar{a},\ \bar{f}(\bar{a}) = \overline{Aa},\ \bar{f}^2(\bar{a}) = \overline{A^2a},\ \bar{f}^3(\bar{a}) = \overline{A^3a}$ は，V/W の基底である．

(2) $c = b - Aa - A^3a$ だから，$\bar{c} = -\overline{Aa} - \overline{A^3a}$ である．

(3) $f(W) \subset W$ を示せばよい．$f(b) = b$ であり，$W = \mathbb{R}b$ だから，$f(W) = W$ である．

(3) $f(a) = Aa,\ f(Aa) = A^2a,\ f(A^2a) = A^3a,\ f(A^3a) = b - (a + A^2a)$ だから $\bar{f}(\bar{a}) = \overline{Aa},\ \bar{f}(\overline{Aa}) = \overline{A^2a},\ \bar{f}(\overline{A^2a}) = \overline{A^3a},\ \bar{f}(\overline{A^3a}) = -\bar{a} - \overline{A^2a}$ である．よって，求める行列表示は，
$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ である．

2 (1) 対称双線形形式 $\mathrm{Tr}({}^tXY)$ は正定値だから，非退化である．J は可逆だから，b も非退化である．$b(A, A) = 4 \neq 0$ だから b の W への制限も非退化である．よって，b_V は非退化である．

(2) $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$ とおくと，D, E, F は V の基底であり，この基底に関する b の行列表示は $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ である．よって，D, E, F は V の直交基底である．

(3) (2) で求めた行列より，符号数は $(1, 2)$ である．

(4) $b(f(X), Y) = \mathrm{Tr}({}^t(BXC)JY) = \mathrm{Tr}({}^tC{}^tX{}^tBJY) = \mathrm{Tr}({}^tXJJ{}^tBJY{}^tC)$ である．よって，$B' = J{}^tBJ,\ C' = {}^tC$ とすればよい．

3 (1) $(a_n) \in V$ を，$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$ にうつす写像 $V \to \mathbb{R}^2$ は同形である．したがって，f_0, f_1 は V^* の基底である．V の定義より，$f_2 = f_1 + f_0$ である．よって，f_1, f_2 も V^* の基底である．

(2) $(a_n) \in V$ とし，$i \in \mathbb{N}$ を自然数とすると，$F^*(g_i)((a_n)) = g_i(F((a_n))$ は，$i = 2j$ または $i = 2j+1$ なら $a_j = f_j((a_n))$ である．よって，$F^*(g_{2j}) = F^*(g_{2j+1}) = f_j$ である．$f_0 = -f_1 + f_2$ だから，求める行列表示は，$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ である．

4 (1) $y_1, \ldots, y_n$ を V の基底，$g_1, \ldots, g_n$ をその双対基底とする．$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ とすると，$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j$ である．よって，$\sum_{j=1}^n g_j \otimes y_j = \sum_{i,j=1}^n g_j \otimes a_{ij}x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}g_j \otimes x_i = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i$ である．

(2) $m((e \otimes 1_V)(x \otimes I) = m((e \otimes 1_V)(x \otimes \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i) = m(\sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i = x$ である．