2007 年度第 4 学期 代数と幾何 期末試験問題

3 月 5 日 (水) 10:00-12:00 (120 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題 1　$V=\mathbb{R}^4$ とおき，V^* を V の双対空間とする．e_1,e_2,e_3,e_4 を V の標準基底とし，f_1,f_2,f_3,f_4 をその双対基底とする．$a=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}$ とおき，W を V の部分空間 $\mathbb{R}\cdot a$ とする．$W^\perp\subset V^*$ を W の零化空間とし，線形写像 $G:W^\perp\to\mathbb{R}^3$ を，$G(f)=\begin{pmatrix}f(e_1)\\f(e_2)\\f(e_3)\end{pmatrix}$ で定める.

(1)　線形写像 $G:W^\perp\to\mathbb{R}^3$ は同形であることを示せ.

(2)　同形 G による $\mathbb{R}^3$ の標準基底の逆像を，$g_1,g_2,g_3\in W^\perp$ とする．包含写像 $i:W^\perp\to V^*$ の，基底 g_1,g_2,g_3 と f_1,f_2,f_3,f_4 に関する行列表示 A を求めよ.

(3)　標準全射 $p:V\to V/W$ による標準基底の像を，$\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3},\overline{e_4}$ とする．$\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ は V/W の基底であることを示せ.

(4)　標準全射 $p:V\to V/W$ の，基底 e_1,e_2,e_3,e_4 と $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ に関する行列表示 B を求めよ.

(5)　(2) と (4) で求めた行列 A と B の関係を述べ，その関係の理由を，双対写像を使って説明せよ.

問題 2　$V=M_2(\mathbb{R})$ の非退化対称双線形形式 $b:V\times V\to\mathbb{R}$ を，$b(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY)$ で定める.

(1)　b の符号数を求めよ.

(2)　行列 $A\in M_2(\mathbb{R})$ に対し，自己準同形 $f_A:V\to V$ を，$f_A(X)=AX$ で定める．$M_2(\mathbb{R})$ の部分空間 $W=\{A\in M_2(\mathbb{R})|f_A$ は対称変換である $\}$ の次元を求めよ.

　ただし，f_A が対称変換であるとは，f_A がその随伴変換 f_A^* と等しいことをいう.

(3)　V の部分空間 W' を，$W'=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\,\middle|\,A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\right\}$ で定める．W' の直交 $W'^\perp$ の基底を，1 組求めよ.

問題 3　e_1,e_2 を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とし，$x,y\in\mathbb{R}^2$ とする．$x\otimes y=3e_1\otimes e_1+2e_1\otimes e_2+ce_2\otimes e_1+4e_2\otimes e_2\in\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ であるとする.

(1)　c を求めよ.

(2)　内積 ${}^t\!xy$ を求めよ.

1 (1) $\dim W^\perp = 4 - \dim W = 3$ だから，G が単射であることを示せばよい．$f \in \operatorname{Ker} G$ ならば，$f \in \mathbb{R} \cdot f_4$ である．$f_4(a) = -1$ だから，$f = 0$ であり，$\operatorname{Ker} G = 0$ である．

(2)
$$g_1 = f_1 + b_1 f_4, \quad g_2 = f_2 + b_2 f_4, \quad g_3 = f_3 + b_3 f_4$$
である．$g_1(a) = 1 - b_1 = 0, \quad g_2(a) = -3 - b_2 = 0, \quad g_3(a) = 3 - b_3 = 0$ だから，
$$g_1 = f_1 + f_4, \quad g_2 = f_2 - 3f_4, \quad g_3 = f_3 + 3f_4$$
である．したがって，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ である．

(3)　$a \notin \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ だから，$V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \oplus W$ である．よって，$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ は V/W の基底である．

(4)　$e_1 - 3e_2 + 3e_3 - e_4 \in W$ だから，$\overline{e_4} = \overline{e_1} - 3\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$ である．よって，求める行列表示 B は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ である．

(5)　A は B の転置である．

零化空間 $W^\perp$ を双対空間 $(V/W)^*$ と同一視すると，包含写像 $i : W^\perp \to V^*$ は，標準全射 $p : V \to V/W$ の双対写像 $p^* : (V/W)^* \to V^*$ と同一視される．$(V/W)^* = W^\perp$ の基底 g_1, g_2, g_3 は，V/W の基底 $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ の双対基底である．よって，$p^* : (V/W)^* \to V^*$ の g_1, g_2, g_3 と f_1, f_2, f_3, f_4 に関する行列表示 A は，$p : V \to V/W$ の e_1, e_2, e_3, e_4 と $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ に関する行列表示 B の転置である．

2(1)　$E_{ij} \in M_2(\mathbb{R})$ を行列単位とすると，$E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21}$ は b に関する直交基底であり，この基底に関する b の行列表示は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ だから，符号数は $(3, 1)$ である．

(2)　$b(AX, Y) = \mathrm{Tr} AXY = \mathrm{Tr} XYA = b(X, YA)$ だから，f_A の随伴変換 f_A^* は，$f_A^*(X) = XA$ で定まる．よって，
$$\begin{aligned} W &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \text{ 任意の } X \in M_2(\mathbb{R}) \text{ に対し}, AX = XA\} \\ &\subset \{A \in M_2(\mathbb{R}) | AE_{11} = E_{11}A, AE_{12} = E_{12}A\} \\ &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A \text{ は対角行列}, AE_{12} = E_{12}A\} \\ &\subset \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A \text{ はスカラー行列 }\} \subset W \end{aligned}$$
であり，$\dim W = 1$ である．

(3)　$W' = \langle E_{11}, E_{21} \rangle$ だから，$W'^\perp = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | \mathrm{Tr} E_{11} X = \mathrm{Tr} E_{21} X = 0\} = \langle E_{21}, E_{22} \rangle$ である．よって，E_{21}, E_{22} は $W'^\perp$ の基底である．

3(1)　$2c = 3 \cdot 4 = 12$ だから，$c = 6$ である．

(2)　内積 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定める線形写像を $f : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とすると，$f(e_1 \otimes e_1) = f(e_2 \otimes e_2) = 1, f(e_1 \otimes e_2) = f(e_2 \otimes e_1) = 0$ だから，${}^t xy = f(x \otimes y) = 3 + 4 = 7$ である．