2007年度第4学期 代数と幾何 中間再試験問題

1月30日(水) 10:00-12:00 (120分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　両面2枚、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題1　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -11 & 7 \\ 3 & 0 & -17 & 11 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とし，$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とおく．$\mathbb{R}^4$ の自己準同形 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(x) = Ax$ で定める．$i \geq 2$ に対し，$x_i \in \mathbb{R}^4$ を，$x_i = f^{i-1}(x_1)$ で定める．x_1 によって生成される $\mathbb{R}^4$ の f 安定部分空間を W とおく.

(1)　$m = \dim W$ を求めよ.

(2)　W の自己準同形 $f|_W$ の，基底 $x_1, \ldots, x_m$ に関する行列表示を求めよ.

(3)　$f|_W$ の最小多項式を求めよ.

(4)　f の最小多項式を求めよ.

(5)　f の固有値をすべて求めよ.

(6)　f のすべての固有値に対し，固有空間の次元と一般固有空間の次元を求めよ.

(7)　f の固有多項式を求めよ.

(8)　f のジョルダン標準形を求めよ.

問題2　$\mathbb{N}_{\geq 1}$ を1以上の自然数全体の集合とし，実数列 $a = (a_n)_{n \geq 1}$ 全体のなす $\mathbb{R}$ 線形空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq 1}}$ の部分空間 V を，

$$V = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq 1}} \mid \text{任意の } n \geq 1 \text{ に対し, } a_{n+5} = -a_{n+4} - a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} - a_n\}$$

で定める．V の自己準同形 $D : V \to V$ を，数列 $a = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ に対し，$b = D(a) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ を $b_n = a_{n+1}$ で定まる数列とすることで定める.

写像 $F : V \to \mathbb{R}^5$ を，$F((a_n)) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$ で定めると，F は同形である．さらに，同形 $F : V \to \mathbb{R}^5$ による，$\mathbb{R}^5$ の標準基底 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 の逆像 $b, c, d, e, f \in V$ は，V の基底である．このことを使って，次の問に答えよ.

(1)　V の自己準同形 D の，基底 b, c, d, e, f に関する行列表示を求めよ．D の固有多項式も求めよ.

(2)　$f, D(f), D^2(f), D^3(f), D^4(f)$ は V の基底であることを示せ.

(3)　V の基底 b, c, d, e, f から $f, D(f), D^2(f), D^3(f), D^4(f)$ への底の変換行列 P を求めよ.

略解 **1**(1) $x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -11 & 7 \\ 3 & 0 & -17 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-9 \\ 1-6+6 \\ -22+21 \\ -34+33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$$x_4 = Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -11 & 7 \\ 3 & 0 & -17 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3 \\ 1+1+3-2 \\ 2+11-7 \\ 3+17-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

である．x_1, x_2, x_3 は 1 次独立であり，$x_4 = -2x_1 + 3x_2$ だから，$m = 3$ である．

(2) $x_4 = -2x_1 + 3x_2$ より，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(3) (2) の行列は多項式 $X^3 - 3X + 2$ の同伴行列だから，最小多項式も $X^3 - 3X + 2$ である．

(4) $Ae_2 = e_2$ だから，f の $\langle e_2 \rangle$ への制限の最小多項式は，$X - 1$ である．$\mathbb{R}^4 = W + \langle e_2 \rangle$ だから，f の最小多項式は，$X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ と $X - 1$ の，最小公倍式 $(X-1)^2(X+2) = X^3 - 3X + 2$ である．

(5) 最小多項式が $(X-1)^2(X+2)$ だから，固有値は，その根 $1, -2$ である．

(6) $0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \widetilde{W}_1$, $W_{-2} = \widetilde{W}_{-2} \neq 0$ で，$W = \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_{-2}$ だから，

$$\dim W_1 = 1, \quad \dim \widetilde{W}_1 = 2, \quad \dim W_{-2} = \dim \widetilde{W}_{-2} = 1$$

である．$V_1 = W_1 \oplus \langle e_2 \rangle, \widetilde{V}_1 = \widetilde{W}_1 \oplus \langle e_2 \rangle$, $V_{-2} = \widetilde{V}_{-2} = W_{-2} = \widetilde{W}_{-2}$ だから，

$$\dim V_1 = 2, \quad \dim \widetilde{V}_1 = 3, \quad \dim V_{-2} = \dim \widetilde{V}_{-2} = 1$$

である．

(7) (6) より，f の固有多項式は，$(X-1)^3(X+2) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ である．

(8) (6) より，f のジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ である．

2 (1) $b = (1,0,0,0,0,-1,\ldots)$ だから，$D(b) = (0,0,0,0,-1,\ldots) = -f$ である．$c = (0,1,0,0,0,-1,\ldots)$ だから，$D(c) = (1,0,0,0,-1,\ldots) = b-f$ である．同様に，$D(d) = c-f, D(e) = d-f, D(f) = e-f$ だから，求める行列表示は，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ である．

A は多項式 $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ の同伴行列の転置だから，固有多項式も $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ である．

(2), (3) $F(D^i(f)) = A^i e_5$ であり，$e_5, Ae_5, A^2e_5, A^3e_5, A^4e_5$ をならべて得られる行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は可逆である．よって，$f, D(f), D^2(f), D^3(f), D^4(f)$ は基底であり，P は底の変換行列である．