2007年度第4学期 代数と幾何 中間試験問題

12月12日(水) 10:00-12:00 (120分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　両面2枚、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題1　$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とする．$\mathbb{R}^4$ の自己準同型 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(x) = Ax$ で定める．

(1)　$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．$i \geq 2$ に対し，$x_i \in \mathbb{R}^4$ を，$x_i = f^{i-1}(x_1)$ で定める．x_1 によって生成される $\mathbb{R}^4$ の f 安定部分空間を W とおき，$m = \dim W$ とする．W の自己準同形 $f|_W$ の，基底 $x_1, \ldots, x_m$ に関する行列表示を求めよ．$f|_W$ の最小多項式も求めよ．

(2)　f の最小多項式を求めよ．

(3)　f の固有値をすべて求めよ．

(4)　f のすべての固有値に対し，固有空間の次元と一般固有空間の次元を求めよ．

(5)　$\mathbb{R}^4$ の基底で，それに関する f の行列表示 J がジョルダン標準形となるものを1つ求めよ．J も求めよ．f の固有多項式も求めよ．

(6)　f の巾零部分を求め，$M_4(\mathbb{R})$ の元として表わせ．

問題2　$V = \{f \in \mathbb{R}[X] | \deg f \leq 4\}$ を，4次以下の多項式全体のなす線形空間とする．

(1)　線形写像 $F : V \to \mathbb{R}^5$ を，$F(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$ で定める．F は同形であることを示せ．

(2)　$g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 \in V$ を，$g_0 = 1, g_1 = X$,

$$g_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \quad g_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}, \quad g_4 = \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{24}$$

で定める．g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 は V の基底であることを示せ．

(3)　$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \in V$ を，同形 $F : V \to \mathbb{R}^5$ による $\mathbb{R}^5$ の標準基底の逆像とする．f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 から g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 への底の変換行列 P を求めよ．

(4)　V の自己準同形 G を，$G(f) = f(X+1)$ で定める．G の，基底 g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 に関する行列表示 A を求めよ．

(5)　G の，基底 f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 に関する行列表示 B を求めよ．

略解 **1**(1) $x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1/5 & -4/5 \\ 1 & -1 & 3/5 & -2/5 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2/5-12/5 \\ -1+6/5-6/5 \\ -9-2+12 \\ -6+2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$x_4 = Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1/5 & -4/5 \\ 1 & -1 & 3/5 & -2/5 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1/5+4/5 \\ 1+1+3/5+2/5 \\ 2+9-1-4 \\ 3+6+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

である．x_1, x_2, x_3 は 1 次独立であり，$x_4 = -2x_1 + 3x_2$ だから，$W = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ である．求める行列表示は，多項式 $X^3 - 3X + 2$ の同伴行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり，最小多項式は $X^3 - 3X + 2$ である．

(2) $A^2 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1/5 & -4/5 \\ 1 & -1 & 3/5 & -2/5 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-9/5+24/5 \\ 3+1-27/5+12/5 \\ 6+9+9-24 \\ 9+6-9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$

だから，f の $\langle e_2, Ae_2 \rangle$ への制限の最小多項式は，$X^2 - 1$ である．$\mathbb{R}^4 = W + \langle e_2, Ae_2 \rangle$ だから，f の最小多項式は，$X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ と $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ の，最小公倍式 $(X-1)^2(X+1)(X+2) = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ である．

(3) 最小多項式が $(X-1)^2(X+1)(X+2)$ だから，固有値は，その根 $1, -1, -2$ である．

(4) $0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \widetilde{V}_1$, $V_{-1} = \widetilde{V}_{-1} \neq 0, V_{-2} = \widetilde{V}_{-2} \neq 0$ で，$\mathbb{R}^4 = \widetilde{V}_1 \oplus V_{-1} \oplus V_{-2}$ だから，$\dim V_1 = 1, \dim \widetilde{V}_1 = 2, \dim V_{-1} = \dim \widetilde{V}_{-1} = 1, \dim V_{-2} = \dim \widetilde{V}_{-2} = 1$ である．

(5) $y_2 = (A+2)x_1 = x_2 + 2x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-1)^2 = \widetilde{V}_1$ である．$y_1 = (A-1)y_2 = x_3 + x_2 - 2x_1 = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1+1 \\ 1+2 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-1) = V_1$ であり，y_1, y_2 は $\widetilde{V}_1$ の基底である．$y_3 = (A-1)e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+1)$ は $\mathrm{Ker}(A+1) = V_{-1}$ の基底であり，$y_4 = (A-1)^2 x_1 = x_3 - 2x_2 + x_1 = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-2 \\ 1-4 \\ -1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+2)$ は $\mathrm{Ker}(A+2) = V_{-2}$ の基底である．

$\mathbb{R}^4$ の基底 y_1, y_2, y_3, y_4 に関する f の行列表示 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ は，f のジョルダ

ン標準形である．

f の固有多項式は，J の固有多項式 $(X-1)^2(X+1)(X+2)$ である．

(6)　P を，$\mathbb{R}^4$ の基底 y_1, y_2, y_3, y_4 をならべて得られる可逆行列 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -9 & -3 \\ 2 & 3 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ とする．f の巾零部分 $N \in M_4(\mathbb{R})$ は，$NP = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ をみたす行列である．長さ 4 のよこベクトル x で，$xP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ をみたすものは，$x = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 3 & 3 \\ 10 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ である．

2　(1)　$\dim V = 5$ だから，F は単射であることを示せばよい．$F(f) = 0$ とすると，$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$ である．よって，f は 5 次式 $X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ でわりきれる．f の次数は 4 以下だから，$f = 0$ である．

(2),(3)　$F(g_0), F(g_1), F(g_2), F(g_3), F(g_4)$ をならべた行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ は可逆だから，g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 は基底であり，P は底の変換行列である．

(4)　$G(g_0) = g_0$ であり，$i \geq 1$ なら $G(g_i) = g_i + g_{i-1}$ だから，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(5)　B は，$F(G(f_0)), F(G(f_1)), F(G(f_2)), F(G(f_3)), F(G(f_4))$ をならべた行列である．$i = 0, 1, 2, 3$ に対し，$G(f_j)(i) = f_j(i+1)$ は，$i+1 = j$ ならば 1 であり，そうでなければ 0 である．よって，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_0(5) & f_1(5) & f_2(5) & f_3(5) & f_4(5) \end{pmatrix}$ は，最高次係数が 1 の 5 次多項式 $b \in \mathbb{R}[X]$ の同伴行列の転置である．(4) より，B の最小多項式 b は $(X-1)^5$ だから，

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$ である．