2006 年度第 4 学期 代数と幾何 中間試験問題 12 月 4 日 (月) 9:00-11:00 (120 分) 斎藤 毅

・問題用紙　１枚、解答用紙　両面２枚、計算用紙１枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とする．$\mathbb{R}^4$ の自己準同型 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(x) = Ax$ で定める．$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V と，その元 $x_1, x_2, x_3 \in V$ を，

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, p+q+r+s=0 \right\}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問いに答えよ.

(1)　x_1, x_2, x_3 は，V の基底であることを示せ.

(2)　$y_1, y_2 \in V$ を，$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定める．y_1, y_2, x_3 は V の基底であることを示し，x_1, x_2, x_3 から y_1, y_2, x_3 への底の変換行列を求めよ.

(3)　$f(V) \subset V$ を示せ.

(4)　以下，f の V への制限を $g : V \to V$ で表わす．$g : V \to V$ の，基底 x_1, x_2, x_3 に関する行列表示を求めよ.

(5)　$g : V \to V$ の固有多項式を求めよ．$g : V \to V$ の固有値もすべて求めよ.

(6)　$g : V \to V$ の核の基底を 1 つ求めよ.

(7)　$g : V \to V$ の，固有値 -1 に属する一般固有空間 $\widetilde{V}_{-1}$ の基底を 1 つ求め，x_1, x_2, x_3 の線形結合として表わせ.

(8)　$g : V \to V$ の半単純部分を $s : V \to V$ とする．$s : V \to V$ の，基底 x_1, x_2, x_3 に関する行列表示を求めよ.

(9)　V の基底で，それに関する g の行列表示がジョルダン標準形となるものを１つ求めよ．その基底に関する行列表示 J も求めよ.

(10)　$g : V \to V$ の最小多項式を求めよ.

問題 2　$V = \langle 1, x, e^x \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$ を，定数関数 1，座標 x と指数関数 e^x によって生成される部分空間とする．線形写像 $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を，$D(f) = f'$ で定める.

(1)　線形写像 $F : V \to \mathbb{R}^3$ を，$F(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix}$ で定める．F は同形であることを示せ.

(2)　$1, x, e^x$ は V の基底であることを示せ.

(3)　$D(V) \subset V$ を示せ.

(4)　D の V への制限の，基底 $1, x, e^x$ に関する行列表示を求めよ.

略解

1 (1) $x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \in V$ なら，$x = px_1+(p+q)x_2+(p+q+r)x_3$ である．$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2-a_1 \\ a_3-a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = 0$ とすると，$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ である．よって，x_1, x_2, x_3 は V の基底である．

(2) $h : V \to V$ を，基底 x_1, x_2, x_3 を y_1, y_2, x_3 にうつす線形写像とする．$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$，$y_2 = x_2 + x_3$ だから，$h : V \to V$ の，x_1, x_2, x_3 に関する行列表示 P は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である．P は可逆だから，y_1, y_2, x_3 は V の基底であり，求める底の変換行列は P である．

(3) $x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とすると，$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ p+s \\ q+s \\ r-s \end{pmatrix}$ である．$p+q+r+s = 0$ ならば，$0 + (p+s) + (q+s) + (r-s) = p+q+r+s = 0$ である．よって，$x \in V$ ならば，$f(x) = Ax \in V$ である．

(4) $g(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2$，$g(x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_3$，$g(x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -x_2 - 2x_3$ だから，求める行列表示は $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ である．

(5) $g : V \to V$ の固有多項式は，$\det(X - B) = X^3 + 2X^2 + X$ である．
$X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$ だから，$g : V \to V$ の固有値は，0 と -1 である．

(6) $g : V \to V$ の固有値 0 の重複度は 1 だから，核の次元は 1 である．$\mathrm{Ker}\ B = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，$\mathrm{Ker}\ g = \mathbb{R}(x_1 + 2x_2 + x_3)$ である．

(7) g の固有値 -1 の重複度は 2 だから，$\widetilde{V}_{-1} = \mathrm{Ker}\ (g+1)^2$ で，$\dim \widetilde{V}_{-1} = 2$ である．$\mathrm{Ker}\ (B+1)^2 = \mathrm{Ker}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，$\widetilde{V}_{-1} = \mathbb{R}x_2 + \mathbb{R}x_3$ である．

(8) V の基底 $z_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, x_2, x_3$ に関する s の行列表示は $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．z_1, x_2, x_3 から $x_1 = z_1 - 2x_2 - x_3, x_2, x_3$ への底の変換行列 P は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で，そ

の逆行列 P^{-1} は $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ だから，求める行列表示は $P^{-1}DP=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ である．

(別解) 固有値 $-1,\ 0$ の重複度はそれぞれ $2,1$ だから，$\widetilde{V}_{-1}=\mathrm{Ker}(g+1)^2$ であり，$\widetilde{V}_0=\mathrm{Ker}\,g$ である．よって，$(g+1)^2-1=(g+2)g$ の $\widetilde{V}_{-1}$ への制限は -1 であり，$\widetilde{V}_0$ への制限は 0 である．$V=\widetilde{V}_{-1}\oplus\widetilde{V}_0$ だから，$s=(g+2)g$ である．求める行列表示は $(B+2)B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ である．

(9)　$(g+1)(x_2)=x_2+x_3,\ (g+1)(x_2+x_3)=0$ である．$x_2+x_3,\ x_2,\ x_1+2x_2+x_3$ は V の基底であり，それに関する g の行列表示 J は $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．

(10)　(4) で求めた $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$ について，$B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$ である．$1,B,B^2$ の第1行は1次独立だから，最小多項式の次数は3以上である．固有多項式 $\Phi=X^3+2X^2+X$ に代入すると，$\Phi(B)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&2&-3\\-2&3&-4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}=0$ である．よって，最小多項式は固有多項式 X^3+2X^2+X と等しい．

2 (1), (2)　$F(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},F(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},F(e^x)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．よって，F は同形であり，$1,x,e^x$ は V の基底である．

(3)　$D(1)=0,D(x)=1,D(e^x)=e^x$ はどれも V の元である．よって，$D(V)\subset V$ である．

(4)　(3) の解より，行列表示は，$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ である．