2006年度第4学期 代数と幾何 追試験問題 7月24日(火) (120分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　両面2枚、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題1 $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間 V を,

$$V = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

で定める．$E_{ij} \in M_2(\mathbb{R})$ で，ij 成分だけが1で他の成分は0の行列を表わし，$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$f(X) = AXB$$

で定まる V の自己準同形 $f : V \to V$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$f : V \to V$ の，基底 E_{11}, E_{12}, E_{22} に関する行列表示を求めよ.

(2)　f の固有値2に属する一般固有空間の基底を，1つ求めよ.

(3)　f の最小多項式を求めよ.

(4)　V の基底で，それに関する f の行列表示がジョルダン標準形となるものを，1つ求めよ.

問題2 $\mathbb{R}^5$ の部分空間 V, W を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, p+q+r+s+t=0 \right\} \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

で定める．$\mathbb{R}^5$ の標準基底 $e_1, \ldots, e_5$ の双対基底を，$f_1, \ldots, f_5 \in (\mathbb{R}^5)^*$ で表わす．商空間 V/W とその双対空間 $(V/W)^*$ について，次の問いに答えよ.

(1)　W の零化空間 $W^\perp = \{f \in (\mathbb{R}^5)^* | f(W) = 0\}$ の基底を1つ求め，$f_1, \ldots, f_5$ の線形結合として表わせ.

(2)　$f \in W^\perp$ に対し，f の V への制限がひきおこす線形形式 $V/W \to \mathbb{R}$ を，以下，$F(f) \in (V/W)^*$ で表わす．$f \in W^\perp$ に対し $F(f) \in (V/W)^*$ を対応させる線形写像 $F : W^\perp \to (V/W)^*$ の，核と像を求めよ.

(3)　$F(f_1), F(f_2), F(f_3)$ は，$(V/W)^*$ の基底であることを示せ.

(4)　$F(f_4 + f_5)$ を，$F(f_1), F(f_2), F(f_3)$ の線形結合として表わせ.

(5)　V の元 x_1, x_2, x_3 で，次の条件をみたすものを1組求め，それを $e_1, \ldots, e_5$ の線形結合として表わせ.

　$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3} \in V/W$ は V/W の基底であり，その双対基底は $F(f_1), F(f_2), F(f_3)$ である.

略解

1 (1) $A\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}B = \begin{pmatrix} 2x & 2x+2y+3z \\ 0 & z \end{pmatrix}$ だから，求める行列表示は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) f の固有多項式は $(X-2)^2(X-1)$ だから，固有値 2 の重複度は 2 である．(1) より，$f(E_{11}) = 2E_{11} + 2E_{12}$, $f(E_{12}) = 2E_{12}$ だから，求める一般固有空間は $\langle E_{11}, E_{12} \rangle$ である．

(3) (2) より，f の固有値 2 に属する固有空間への制限は，2 倍写像ではない．よって，f の最小多項式は固有多項式と等しく，$(X-2)^2(X-1)$ である．

(4) V の基底 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に関する f の行列表示は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

2 (1) $W^\perp = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 + f_5 \rangle$ である．

(2) $F : W^\perp \to (V/W)^*$ は全射で，その核は V の零化空間 $V^\perp = \langle f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 \rangle$ である．

(3) $f_1, f_2, f_3, f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$ は $W^\perp$ の基底だから，$\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ は $W^\perp / V^\perp$ の基底である．よって，(2) と準同形定理より，$F(f_1), F(f_2), F(f_3)$ は $(V/W)^*$ の基底である．

(4) $F(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5) = 0$ だから，$F(f_4 + f_5) = -F(f_1) - F(f_2) - F(f_3)$ である．

(5) $x_1 = e_1 - e_5, x_2 = e_2 - e_5, x_3 = e_3 - e_5 \in V$ とおけば，$i, j = 1, 2, 3$ に対し，

$$F(f_i)(\overline{x_j}) = f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

である．