2006 年度　第 4 学期　代数と幾何　期末試験問題　3 月 5 日 (月) 9:00-11:00 (120 分)　斎藤　毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚
・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意： 答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とし，$V = \mathbb{R}^4$ の自己準同型 $f : V \to V$ を，$f(x) = Ax$ で定める．$W = \mathrm{Ker}\ f \subset V$ とし，$\overline{V}$ を商空間 V/W とする．e_1, e_2, e_3, e_4 を $V = \mathbb{R}^4$ の標準基底とする．次の問に答えよ.

(1)　$f : V \to V$ がひきおこす同形 $\bar{f} : \overline{V} \to \mathrm{Im}\ f$ による，$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4} \in \overline{V}$ の像を，$e_2, e_3, e_4 \in \mathrm{Im}\ f$ の線形結合として表わせ.

(2)　$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ は $\overline{V}$ の基底であることを示し，$\overline{e_4}$ をこれらの線形結合として表わせ.

(3)　V^* を V の双対空間，$\overline{V}^*$ を $\overline{V}$ の双対空間とする．$f_1, f_2, f_3, f_4 \in V^*$ を，e_1, e_2, e_3, e_4 の双対基底とし，$g_1, g_2, g_3 \in \overline{V}^*$ を $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ の双対基底とする．標準全射 $p : V \to \overline{V}$ の双対写像を，$p^* : \overline{V}^* \to V^*$ とする.

　$p^* : \overline{V}^* \to V^*$ の，基底 g_1, g_2, g_3 と f_1, f_2, f_3, f_4 に関する行列表示を求めよ.

(4)　$f : V \to V$ がひきおこす $\overline{V}$ の自己準同形を $g : \overline{V} \to \overline{V}$ とする．$g : \overline{V} \to \overline{V}$ の，基底 $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ に関する行列表示を求めよ.

(5)　$g : \overline{V} \to \overline{V}$ の，最小多項式を求めよ.

(6)　g の固有値 -1 に属する一般固有空間 $\widetilde{\overline{V}}_{-1} \subset \overline{V}$ の元で，固有空間 $\overline{V}_{-1} \subset \overline{V}$ の元ではないものを 1 つ求めよ.

問題 2　$V = M_{23}(\mathbb{C})$（2 行 3 列行列の全体）とし，エルミート形式 $h : V \times V \to \mathbb{C}$ を $h(X, Y) = \mathrm{Tr}\ {}^t X \overline{Y}$ で定める．次の問に答えよ.

(1)　h は正定値であることを示せ.

(2)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ とし，V の自己準同形 $f, g : V \to V$ をそれぞれ $f(X) = AX, g(X) = XB$ で定める．f と g の h に関する随伴写像を求めよ.

(3)　V の h に関する正規直交基底で，f と g の両方に関する固有ベクトルからなるものを 1 つ求めよ.

問題 3　$V = \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ とする．V の部分空間 W, W' を $W = \langle x \otimes x | x \in \mathbb{R}^3 \rangle$，$W' = \langle x \otimes y - y \otimes x | x, y \in \mathbb{R}^3 \rangle$ で定める．$\dim W, \dim W'$ を求めよ.

問題 4　積集合 $GL_3(\mathbb{R}) \times GL_3(\mathbb{R})$ に，乗法を成分ごとに $(P, Q) \cdot (P', Q') = (PP', QQ')$ で定めたものを，群 G とする．$X = M_3(\mathbb{R})$ とする.

(1)　$(P, Q) \in G$ と $A \in X$ に対し，$(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$ とおくことで，G の X への左作用が定まることを示せ.

(2)　(1) で定めた作用について，X に含まれる G 軌道の個数を求めよ.

略解

1 (1)　$f(e_1)=e_2, f(e_2)=e_3, f(e_3)=e_4, f(e_4)=e_2+e_3-e_4$ だから，$\overline{f}(\overline{e_1})=e_2, \overline{f}(\overline{e_2})=e_3, \overline{f}(\overline{e_3})=e_4, \overline{f}(\overline{e_4})=e_2+e_3-e_4$ である．

(2)　f の階数は 3 であり，$\overline{f}(\overline{e_1})=e_2, \overline{f}(\overline{e_2})=e_3, \overline{f}(\overline{e_3})=e_4$ は $\mathrm{Im}\ f$ の基底である．よって，準同形定理より，$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ は $\overline{V}$ の基底である．

$\overline{f}(\overline{e_4})=\overline{f}(\overline{e_1+e_2-e_3})$ だから，$\overline{e_4}=\overline{e_1}+\overline{e_2}-\overline{e_3}$ である．

(3)　標準全射 $p: V\to\overline{V}$ の，基底 e_1,e_2,e_3,e_4 と $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ に関する行列表示は，(2) より，$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\in M_{34}(\mathbb{R})$ である．$p^*: \overline{V}^*\to V^*$ の，基底 g_1,g_2,g_3 と f_1,f_2,f_3,f_4 に関する行列表示は，その転置 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\in M_{43}(\mathbb{R})$ である．

(4)　(2) より，求める行列表示は $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\in M_{43}(\mathbb{R})$ である．

(5)　(4) より，g の最小多項式は X^3+X^2-X-1 である．

(6)　$X^3+X^2-X-1=(X+1)^2(X-1)$ だから，$(g-1)\overline{e_1}=\overline{e_2}-\overline{e_1}$ は $\widetilde{\overline{V}}_{-1}$ の元であり，$\overline{V}_{-1}$ の元ではない．

2 (1)　$h(X,X)=\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^3|x_{ij}|^2$ だから，$h(X,X)\geq 0$ であり，$h(X,X)=0$ は $X=0$ と同値である．

(2)　$h(AX,Y)=\mathrm{Tr}\ {}^t(AX)\overline{Y}=\mathrm{Tr}\ {}^tX\ {}^tA\overline{Y}=\mathrm{Tr}\ {}^tX\overline{AY}=h(X,AY)$ だから，$f^*=f$ である．$h(XB,Y)=\mathrm{Tr}\ {}^t(XB)\overline{Y}=\mathrm{Tr}\ {}^tB\ {}^tX\overline{Y}=\mathrm{Tr}\ {}^tX\overline{Y}\ {}^tB=\mathrm{Tr}\ {}^tX\overline{Y\ {}^tB}=h(X,YB^2)$ だから，$g^*=g^2$ である．

(3)　ω を 1 の原始 3 乗根とする．$i=0,1,2$，$j=0,1$ に対し，

$$X_{ij}=\begin{pmatrix}1&\omega^i&\omega^{-i}\\(-1)^j&(-1)^j\omega^i&(-1)^j\omega^{-i}\end{pmatrix}\in V=M_{23}(\mathbb{C})$$

とおく．$AX_{ij}B=\omega^i(-1)^jX_{ij}$ である．$h(X_{ij},X_{ij})=6$ であり，$(i,j)\neq(i',j')$ ならば $h(X_{ij},X_{i'j'})=0$ である．よって，$\frac{1}{\sqrt{6}}X_{ij}, (i=0,1,2, j=0,1)$ は V の正規直交基底である．

3　$W=\langle e_1\otimes e_1, e_2\otimes e_2, e_3\otimes e_3, e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1, e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_2, e_3\otimes e_1+e_1\otimes e_3\rangle$ だから，$\dim W=6$ である．$W'=\langle e_1\otimes e_2-e_2\otimes e_1, e_2\otimes e_3-e_3\otimes e_2, e_3\otimes e_1-e_1\otimes e_3\rangle$ だから，$\dim W'=3$ である．

4 (1)

$$\begin{aligned}&(P,Q)((P',Q')A)=(P,Q)P'AQ'^{-1}=PP'AQ'^{-1}Q^{-1}\\=\ &(PP')A(QQ')^{-1}=(PP',QQ')A=((P,Q)(P',Q'))A\end{aligned}$$

であり，$(1,1)A=A$ である．

(2) A が A' と同じ G 軌道に属するとは，A の階数と A' の階数が等しいということである．したがって，X に含まれる G 軌道の個数は 4 である．