定義 6 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を写像とする．

1. $f(z)$ が連続であるとは，すべての複素数 a とすべての実数 $q > 0$ に対し，実数 $r > 0$ で $|z-a| < r$ をみたすすべての複素数 z に対し $|f(z) - f(a)| < q$ となるものが存在することをいう．

2. $f(z)$ が開写像であるとは，すべての複素数 a とすべての実数 $r > 0$ に対し，実数 $q > 0$ で $|w - f(a)| < q$ をみたすすべての複素数 w に対し $|z-a| < r$ と $w = f(z)$ をみたす z が存在するようなものが存在することをいう．

命題 7 $f(z)$ を複素数係数の多項式で定数ではないものとすると，$f(z)$ が定める写像 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は開写像である．

x^2 は実数係数の多項式で定数ではないが，x^2 が定める写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は開写像ではない．

レポート問題　その２　しめきりは 6 月 7 日です．

問題 1 1. $\mathbb{R}^4$ の部分集合 $A = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ はコンパクトであることを示せ．A で定義された連続関数 $x+y+z+w$ の最大値を求めよ．

2. $\mathbb{R}^8$ の部分集合 $B = A \times A = \{(x,y,z,w,p,q,r,s) \in \mathbb{R}^8 \mid (x,y,z,w) \in A,\ (p,q,r,s) \in A\}$ はコンパクトであることを示せ．B で定義された連続関数 $xp + yq + zr + ws$ の最大値を求めよ．

問題 2 数列 (a_n) で，すべての番号 $n \geq 1$ に対し $0 \leq a_n \leq 1$ であり，任意の実数 $0 \leq a \leq 1$ に対し a に収束する部分列が存在するものを 1 つ与えよ．

問題 3 数列 (a_n) を $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$ で定め，巾級数 $w(z), w'(z)$ を $w(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $w'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ で定める．

1. 巾級数の等式 $(1+4z)\cdot w'(z) = 1 + 2w(z)$ を示せ．

2. 巾級数 $u(z)$ を $u(z) = (1 + 2w(z))^2$ で定める．巾級数の等式 $(1+4z)\cdot u'(z) = 4u(z)$ を示し，$u(z) = 1 + 4z$ を導け．

3. $|x| < \frac{1}{4}$ なら $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ は収束することを示し，$\left(1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = 1 + 4x$ であることを示せ．

4. a_n はすべて整数であることを示せ．