定義 1　R が単位元をもつ可換**環**（かん） (ring) であるとは，R に**加法** (addition) $+$ と **乗法** (multiplication) $\cdot$ が定義されていて，次の条件（１）－（８）がみたされていることである．

（１）R の任意の元（げん） a, b, c に対し，$(a+b)+c = a+(b+c)$ がなりたつ．
（２）R の元 0 で，R の任意の元 a に対し，$a+0=0+a=a$ をみたすものがただ１つある．
（３）R の任意の元 a に対し，$a+b=b+a=0$ をみたす R の元 b がただ１つある．
（４）R の任意の元 a, b に対し，$a+b=b+a$ がなりたつ．
（５）R の任意の元 a, b, c に対し，$(ab)c=a(bc)$ がなりたつ．
（６）R の元 1 で，R の任意の元 a に対し，$a1=1a=a$ をみたすものがただ１つある．
（７）R の任意の元 a, b に対し，$ab=ba$ がなりたつ．
（８）R の任意の元 a, b, c に対し，$(a+b)c=ac+bc$，$a(b+c)=ab+ac$ がなりたつ．□

定義 2 R を単位元をもつ可換環とする．R の部分集合 I が R の**イデアル** (ideal) であるとは，次の条件（１）－（３）がみたされていることである．

（１）I の任意の元 a, b に対し，$a+b \in I$ がなりたつ．
（２）R の任意の元 a と I の任意の元 b に対し，$ab \in I$ がなりたつ．
（３）$0 \in I$ である．□

定義 3 R と R' を単位元をもつ可換環とする．写像 $f\colon R \to R'$ が環の**射**（しゃ） (morphism) であるとは，次の条件（１）－（３）がみたされていることである．

（１）R の任意の元 a, b に対し，$f(a+b)=f(a)+f(b)$ がなりたつ．
（２）R の任意の元 a, b に対し，$f(ab)=f(a)f(b)$ がなりたつ．
（３）$f(1_R)=1_{R'}$ である．□

定義 4 単位元をもつ可換環 R が**体**（たい） (field) であるとは，次の条件（１），（２）がみたされていることである．

（１）R の 0 でない任意の元 a に対し，$ab=ba=1$ をみたす R の元 b がただ１つある．
（２）$1 \neq 0$ である．□