抽象数学の極み　レポート問題その２

下の問題のうち，少なくとも1問を解いて，6月29日か7月6日に，提出してください．余力のある人は全部解いてももちろん結構です．

そのほか，授業の感想を，自由に書いてください．

問題１　関数 $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x}} & x > 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x \leq 0 \text{ のとき}, \end{cases}, \quad g(x) = f(x - \frac{1}{4}) \cdot f(\frac{3}{4} - x), \quad h(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x g(t)dt}{\displaystyle\int_0^1 g(t)dt}.$$

f, g, h はすべて無限回連続微分可能であることを示せ．

問題２　U, V を平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \text{ は実数}\}$ からそれぞれ点 $(0,0), (1,0)$ をのぞいたものとし，$W = U \cap V$ を共通部分とする．線形写像 $F \colon C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(U) \oplus C^\infty(V)$ と $G \colon C^\infty(U) \oplus C^\infty(V) \to C^\infty(W)$ を，

$$\begin{aligned} F(f) =& (f \text{ の定義域を } U \text{ に制限したもの}, \ f \text{ の定義域を } V \text{ に制限したもの}), \\ G(g, h) =& (g \text{ の定義域を } W \text{ に制限したもの}) - (h \text{ の定義域を } W \text{ に制限したもの}) \end{aligned}$$

で定める．

1.　関数 $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を問題１のとおりとする．$f \in C^\infty(W)$ に対し，関数 $f_0 \colon U \to \mathbb{R}$, $f_1 \colon V \to \mathbb{R}$ を

$$f_0(x, y) = \begin{cases} (1 - h(x)) \cdot f(x, y) & x < 1 \text{ のとき}, \\ 0 & x \geq 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = \begin{cases} -h(x) \cdot f(x, y) & x > 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x \leq 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

で定める．$f_0 \in C^\infty(U), f_1 \in C^\infty(V)$ であり，$f = G(f_0, f_1)$ であることを示せ．

2.

$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{F} C^\infty(U) \oplus C^\infty(V) \xrightarrow{G} C^\infty(W) \longrightarrow 0$$

は完全系列であることを示せ．

問題３　$U, V, W = U \cap V$ を問題２のとおりとする．可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^0(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "f \mapsto (f|_U, f|_V)"] \arrow[d, "d"'] & A^0(U) \oplus A^0(V) \arrow[r, "(g,h) \mapsto g|_W - h|_W"] \arrow[d, "d"'] & A^0(W) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^1(\mathbb{R}^2) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & A^1(U) \oplus A^1(V) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "d"'] & A^1(W) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^2(\mathbb{R}^2) \arrow[r] \arrow[d] & A^2(U) \oplus A^2(V) \arrow[r] & A^2(W) \arrow[r] & 0 \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

を考える．各行と左のたての列が完全系列であることを使って，線形写像 $*$ がひきおこす線形写像 $H^1_{dR}(U) \oplus H^1_{dR}(V) \to H^1_{dR}(W)$ は同形であることを示せ．

問題 4　C_0 を点 $(0,0)$ を中心とする半径が $\dfrac{1}{2}$ の正の向きの円とし，C_1 を点 $(1,0)$ を中心とする半径が $\dfrac{1}{2}$ の正の向きの円とする．1 形式 $\omega \in A^1(W)$ に対し，次の条件は同値であることを，問題 3 を使って示せ．

(1)　$d\omega = 0$ かつ $\displaystyle\int_{C_0} \omega = \int_{C_1} \omega = 0.$

(2)　$\omega = df$ をみたす関数 $f \in A^0(W)$ が存在する．