抽象数学の極み　レポート問題その１

下の問題のうち少なくとも1問を解いて，6月1日に提出してください．

問題１　R を環とする．次の問いに答えよ．

解答中のどこで定義の条件を使ったかを明記してください．

1.　a を R の元とする．$a+b=b$ をみたす $b \in R$ が存在するならば，$a=0$ であることを示せ．

2.　R の任意の元 a に対し，$0 \cdot a = 0$ を示せ．

3.　R の任意の元 a, b に対し，$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ を示せ．

4.　R' も環とし，$f\colon R \to R'$ を環の射とする．$f(0_R) = 0_{R'}$ を示せ．

5.　環の射 $f\colon \mathbb{Z} \to R$ がただ1つ存在することを証明せよ．

問題２　p を素数とする．環の射 $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+X+1) \to \mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]/(p)$ を定義し，それが同形であることを示せ．

問題３　1.　環 $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ はユークリッド環であることを示せ．

2.　素数 p について次の条件は同値であることを示せ．

(1)　$p = a^2 + ab + b^2$ をみたす整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ は存在しない．

(2)　p は環 $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ の既約元である．

問題４　素数 p について次の条件は同値であることを示せ．

(1)　p を3でわるとあまりは2である．

(2)　$X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ は既約である．

問題５　問題2から4までを使って，素数 p について次の条件は同値であることを示せ．

(1)　p を3でわるとあまりは2である．

(2)　$p = a^2 + ab + b^2$ をみたす整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ は存在しない．